

UNIVERSIDAD ORT URUGUAY

FACULTAD DE INGENIERÍA

---

**Modelado de la propagación de errores  
en algoritmos cuánticos**

---

ENTREGADO COMO REQUISITO PARA LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO  
DE LICENCIADA EN ELECTRÓNICA

*Autor*

Carolina Allende Amen - 233383

*Tutores*

André Fonseca De Olivera

Efrain Buksman Hollander

2020

---

## Declaración

Yo, Carolina Allende Amen, declaro que el trabajo que se presenta en esa obra es de mi propia mano. Puedo asegurar que:

- La obra fue producida en su totalidad mientras realizaba el proyecto integrador de la Licenciatura en Electrónica;
- Cuando he consultado el trabajo publicado por otros, lo he atribuido con claridad;
- Cuando he citado obras de otros, he indicado las fuentes. Con excepción de estas citas, la obra es enteramente mía;
- En la obra, he acusado recibo de las ayudas recibidas;
- Cuando la obra se basa en trabajo realizado conjuntamente con otros, he explicado claramente qué fue contribuido por otros, y qué fue contribuido por mí;
- Ninguna parte de este trabajo ha sido publicada previamente a su entrega, excepto donde se han realizado las aclaraciones correspondientes.



**Carolina Allende**

05 de Febrero de 2020

---

Para Roberto Calvo Vayra, Ana Medeiros y Rosario Mouriz

---

## Agradecimientos

Me gustaría agradecerles primero que nada a mis padres, gracias a quienes estoy en este lugar hoy y a mis tutores, los doctores André Fonseca y Efrain Buksman por brindarme la oportunidad de formar parte del grupo de investigación en computación cuántica. Asimismo, me gustaría agradecer a Guillermo Pena, por toda su ayuda, paciencia y cariño. También me gustaría agradecerle a la doctora Cecilia Cabeza, por guiarme en mis primeros pasos en investigación científica. Por último, me gustaría agradecer a mis profesores de secundaria más estimados: Ana Medeiros, Rosario Mouriz y Roberto Calvo Vayra, quienes me motivaron a elegir una carrera científica tecnológica.

---

## Abstract

En este trabajo se presenta un análisis algoritmos cuánticos con el propósito de caracterizar y modelar la propagación de errores. Por un lado se presenta una breve introducción a la computación cuántica, su nomenclatura y utilidad, mientras que por otro lado se muestra un algoritmo cuántico en concreto, la transformada cuántica de Fourier. El estudio de la propagación de errores en sistemas cuánticos es de vital importancia para su futura corrección, y para que estos puedan desarrollar todo su potencial que hoy en día es muy prometedor, siendo que han probado poder resolver problemas que en una computadora clásica tomaría un tiempo infinito [1] así como resolver problemas con mayor eficiencia, como ser la factorización en número primos (Algoritmo de Shor)[2], búsqueda de un elemento en una base desordenada (Algoritmo de Grover)[3], entre otros [4].

---

## Palabras clave

Computación cuántica, Transformada cuántica de Fourier, Modelos de error.

---

## Indice

Introducción	9
Capítulo 1: Introducción a la computación cuántica	
1.1 Postulados	11
1.2 Postulado 1: El qubit	12
1.3 Postulado 2: Como evolucionan los qubits	15
1.4 Postulado 3: Como la medición afecta los qubits	18
1.5 Postulado 4: Como se combinan para crear sistemas de varios qubits	20
1.6 Entrelazamiento cuántico	21
1.7 Representación de estados	24
1.8 Operador traza parcial	25
Capítulo 2: Errores en sistemas cuánticos	
2.1 Sistemas abiertos	27
2.2 Modelo de error	27
2.3 Error de depolarización de canal (Depolarizing Channel)	29
2.4 Error sistemático	29

---

2.5 Índice isotrópico	30
2.6 QST: Tomografía de estado cuántica	33
Capítulo 3: Transformada de Fourier	
3.1 DFT: Transformada discreta de Fourier clásica	36
3.2 QFT: Transformada cuántica de Fourier	39
3.3 Implementación del circuito cuántico	41
Capítulo 4: Resultados experimentales	
4.1 Reconstrucción de las matrices de densidad resultantes	43
4.2 Matrices de giro y parámetros para depolarizing channel	45
4.3 Conclusiones	48
Referencias	51



---

## Introducción

La idea de usar la mecánica cuántica como una herramienta para cálculos surge de los trabajos de los pioneros Deutsch y Feynman[4][5] en la década de 1980. Se basa en el uso de propiedades como la superposición y el entrelazamiento para realizar tareas computacionales, lo cual requiere una computadora cuántica que trabaje a niveles microscópicos. De esta manera, una computadora cuántica podría resolver algunos problemas conocidos más eficientemente que lo que se puede lograr con computadoras clásicas, logrando así avances en criptografía, farmacología y análisis de datos.

Grandes compañías como ser Google, Intel, Microsoft e IBM, entre otras, se han embarcado en la construcción de computadoras cuánticas, contando hoy en día con sistemas capaces de controlar algunas decenas de qubits. En particular, la computadora de IBM Q utilizada en este trabajo es una máquina basada en tecnologías de superconductores que es de acceso público a través de internet. Varios algoritmos basados en estos beneficios cuánticos han sido propuestos: entre los más importantes se encuentran el algoritmo de Shor y el de Grover. El algoritmo de Shor [2] reduce el tiempo de cómputo de un orden subexponencial en computación clásica a un orden polinomial en computación cuántica. Por otro lado, el algoritmo de Grover [3] es un algoritmo de búsqueda de un elemento en una base desordenada. Los algoritmos clásicos conocidos son de orden  $O(N)$ , mientras que el algoritmo cuántico permite determinar el elemento deseado con alta probabilidad con un orden de  $O(\sqrt{N})$ .

Sin embargo, el hecho de que los sistemas cuánticos no puedan ser completamente aislados del entorno, junto con imperfecciones en la aplicación de compuertas, preparación de estados inexacta y mediciones imperfectas, inducen errores en cualquier tarea computacional cuántica. Si bien existen métodos capaces de corregir errores por debajo de una cierta cota [6], estos métodos son muy costosos en términos computacionales. Por otro lado, el desarrollo de nuevas herramientas capaces

---

de caracterizar y analizar el efecto y propagación de errores cuánticos es un punto importante de manera de intentar corregir estos errores con la menor complejidad posible.

---

# Capítulo 1: Introducción a la computación cuántica

## 1.1 Postulados

La computación cuántica se basa en cuatro postulados que derivan de los postulados de la mecánica cuántica.

- Postulado 1: Definición de un qubit o quantum bit
- Postulado 2: Como evolucionan los qubits
- Postulado 3: Como la medida afecta a los qubits
- Postulado 4: Como los qubits se combinan para crear sistemas de varios qubits.

---

## 1.2 Postulado 1: El qubit

Primer postulado:

*“Todo sistema físico aislado tiene asociado un espacio vectorial complejo con un producto interno (i.e. un espacio de Hilbert) conocido como espacio de estados del sistema. El sistema está completamente definido por su vector de estados, que es un vector unitario en el espacio de estados del sistema” [7]*

En la computación clásica la unidad en la que se representan todos los datos es el bit, siendo que este puede tomar un valor 1 o 0, formando arreglos de bits típicos de las memorias clásicas. En la computación cuántica existe un análogo: el qubit. Desde un punto de vista físico, el qubit surge como el spin de un electrón que puede tomar valores 1 (down) o cero (up). Para hablar de computación cuántica será necesario introducir la notación de Dirac. Esta notación es una herramienta para representar vectores en el espacio de Hilbert. Por ejemplo, el estado de un qubit  $|0\rangle$  está dado por:

$$|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Mientras que el  $|1\rangle$  está dado por:

$$|1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Los estados  $|0\rangle$  y  $|1\rangle$  son conocidos como base computacional del espacio de estados de un qubit, es decir, cualquier vector de estados de un qubit puede ser escrito como una

---

combinación lineal de la base, donde la base es el generador mínimo del estado. Un sistema cuántico puede estar en una superposición de los estados base, como ser

$$|\Psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle \quad (3)$$

donde  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  y se les conoce como amplitudes.

En computación clásica el valor de los bits queda determinado de forma precisa y es de hecho exactamente esto lo que se obtiene al leer una memoria clásica. En cambio, en general, en computación cuántica no se puede recuperar el valor de un qubit: al medir un estado cuántico se destruye la superposición, y se obtiene uno de los estados de la base. Para ejemplificar, en el caso del estado  $\Psi$ , al medir se obtiene el estado  $|0\rangle$  con una probabilidad  $|\alpha|^2$  y el estado  $|1\rangle$  con una probabilidad  $|\beta|^2$ . Como el cuadrado de los módulos de  $\alpha$  y  $\beta$  son probabilidades, el estado  $|\Psi\rangle$  debe ser unitario, y por tanto:

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \quad (4)$$

A su vez, con la notación de Dirac se pueden representar dos tipos de operaciones que serán de interés a lo largo del desarrollo del marco teórico, el producto interno y el producto externo. El producto interno es el mismo que entre vectores en el álgebra clásica, y se nota como  $\langle\Psi|\Psi\rangle$ , que resultaría en el módulo cuadrado del estado  $\Psi$ . Por otro lado, se introduce una noción nueva, la de producto externo entre dos vectores, el cual viene dado por la expresión  $|\Psi\rangle\langle\Psi|$ . Este producto entre vectores resulta en una matriz, de la forma:

$$|\Psi\rangle\langle\Psi| = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha^* & \beta^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |\alpha|^2 & \alpha\beta^* \\ \beta\alpha^* & |\beta|^2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Es decir, cada entrada  $(i,j)$  de la matriz resultante se obtiene multiplicando la componente  $i$  del vector columna por la componente conjugada  $j$  del vector fila.

---

### 1.3 Postulado 2: Como evolucionan los qubits

El segundo postulado:

*“La evolución de un sistema cuántico **cerrado** está descrito por una **transformación unitaria**. Esto es, el estado  $|\Psi\rangle$  del sistema en un tiempo  $t_1$  se relaciona con el estado  $|\Psi'\rangle$  del sistema en un tiempo  $t_2$  por medio de un operador unitario  $\mathbf{U}$  que solo depende de los tiempos  $t_1$  y  $t_2$ ” [8]*

$$|\Psi'\rangle = \mathbf{U} |\Psi\rangle \quad (6)$$

Si bien no es sencillo encontrar el sistema físico asociado a la transformación que se quiere emplear, los postulados de la mecánica cuántica garantizan que la matriz existe y es unitaria. Debe ser unitaria para preservar la norma de los estados, cuyo módulo no puede ser mayor que uno por tratarse de suma de probabilidades. Para sistemas de un qubit, existen algunas transformaciones notables, que luego pueden ser generalizadas para sistemas de varios qubits. Algunos operadores unitarios importantes son los operadores de Pauli, dados por las matrices de las ecuación (7 a 10).

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

---


$$Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Veamos como actúan estos operadores sobre el estado  $\Psi$  definido anteriormente:

$$I\Psi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \quad (11)$$

Donde  $I$  es el operador identidad que no modifica las amplitudes del estado de entrada.

$$X\Psi = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta \\ \alpha \end{bmatrix} \quad (12)$$

Al operador  $X$  se le conoce como el análogo cuántico a la compuerta **NOT** clásica, dado a que cambia las amplitudes entre los estados de la base. También se le conoce, por la misma razón, como *Bit Flip*.

$$Z\Psi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ -\beta \end{bmatrix} \quad (13)$$

Por otro lado, al operador  $Z$  se le conoce como *Phase Flip*, puesto que simetriza al estado entorno a un eje.

$$Y\Psi = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i\beta \\ i\alpha \end{bmatrix} \quad (14)$$

Por último, al operador  $Y$  se le conoce como *Bit-Phase Flip*, dado a que tiene la misma acción que aplicar los operadores  $X$  y  $Z$  en cascada.

---

Estos cuatro operadores notables llevan su nombre en honor del físico austriaco Wolfgang Pauli. Para este trabajo serán necesarios algunos otros operadores, como ser el de Walsh-Hadamard dado por la matriz que se muestra a continuación junto con su acción sobre el estado  $|\Psi\rangle$ .

$$H|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \alpha + \beta \\ \alpha - \beta \end{bmatrix} \quad (15)$$

Por último, el operador  $C_{NOT}$ , o controlled-Not, operador de un sistema de al menos dos qubits, que niega el valor del segundo qubit si y solo si el primero es  $|1\rangle$ .

$$C_{NOT}|\Psi\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$



---

## 1.4 Postulado 3: Como la medición afecta a los qubits

El tercer postulado:

*”Las mediciones cuánticas están descritas por un conjunto  $M_m$  de **operadores de medida**. Estos son operadores que actúan en el espacio de estados del sistema que se quiere medir. El índice  $m$  refiere a los posibles resultados que puedan surgir de realizar la medición.” [9]*

Si el estado del sistema cuántico es  $|\Psi\rangle$  inmediatamente antes de la medida, entonces la probabilidad de obtener el resultado  $m$  está dada por el producto interno:

$$p(m) = \langle \Psi | M_m^\dagger M_m | \Psi \rangle \quad (17)$$

Y el estado del sistema luego de la medida es:

$$\frac{M_m |\Psi\rangle}{\sqrt{\langle \Psi | M_m^\dagger M_m | \Psi \rangle}} \quad (18)$$

Como mencionado anteriormente, la probabilidad de obtener el resultado  $m$  está dado por la ecuación (17), y como tales deben satisfacer:

$$1 = \sum_m p(m) = \sum_m \langle \Psi | M_m^\dagger M_m | \Psi \rangle \quad (19)$$

De donde se desprende que los operadores  $M_m$  deben satisfacer la siguiente relación para que la ecuación (19) se cumpla.

$$\sum_m M_m^\dagger M_m = I \quad (20)$$

Para mayor claridad, analizaremos el caso de una medida en un sistema de un qubit, más concretamente, analizaremos el resultado de medir el estado  $\Psi$  definido en la ecuación (3). En este caso, se tienen solo dos elementos en la base y por tanto, los operadores están dados por  $M_0 = |0\rangle\langle 0|$  y  $M_1 = |1\rangle\langle 1|$ , o sea:

---


$$M_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (21)$$

Notando que estos operadores cumplen la ecuación (20) y que el resultado de elevar cada matriz al cuadrado es sí misma, calculamos la probabilidad de medir 0 (notado  $p(0)$ ):

$$p(0) = \langle \Psi | M_0^\dagger M_0 | \Psi \rangle = \langle \Psi | M_0 | \Psi \rangle \quad (22)$$

$$p(0) = |\alpha|^2 \quad (23)$$

Y el estado resultante luego de la medida es:

$$\frac{M_0 | \Psi \rangle}{|\alpha|} = \frac{\alpha |0\rangle}{|\alpha|^2} \quad (24)$$

Siguiendo el mismo razonamiento podemos calcular la probabilidad de obtener 1 y el estado resultante luego de la medida:

$$p(1) = |\beta|^2 \quad (25)$$

$$\frac{M_1 | \Psi \rangle}{|\beta|} = \frac{\beta |0\rangle}{|\beta|^2} \quad (26)$$

Mientras no se mida el estado del sistema, este es efectivamente una superposición de estados base, es decir, es un estado cuántico. Luego de realizar una medición, esa superposición se rompe, y el estado colapsa a un valor concreto. Cabe recalcar que una vez medido, se rompe la superposición y no se pueden obtener más datos sobre el estado previo a la medida.

---

## 1.5 Postulado 4: Como se combinan para crear sistemas de varios qubits

El cuarto postulado, donde  $\otimes$  denota el producto tensorial:

*”El espacio de estados de un sistema físico compuesto es el producto tensorial de los espacios de estados de las componentes del sistema. Además, si las componentes están numeradas desde 1 hasta  $n$ , y el sistema número  $i$  está en el estado  $|\Psi_i\rangle$ , entonces el estado completo del sistema total es  $|\Psi_1\rangle \otimes |\Psi_2\rangle \dots \otimes |\Psi_n\rangle$ ” [10]*

Tomemos, por ejemplo, un estado de dos qubits  $|\Psi\rangle = |\psi\rangle \otimes |\phi\rangle$  y  $|\phi\rangle = |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ . Para encontrar el espacio de estados del sistema de dos qubits descrito por ellos, basta con calcular el producto tensorial  $|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle$ , el cual resultaría:

$$|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \quad (27)$$

$$|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle = \frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle) \quad (28)$$

---

## 1.6 Entrelazamiento cuántico

*Spooky action at a distance.*

— *Albert Einstein [11]*

El entrelazamiento es una de las propiedades más interesantes de los sistemas cuánticos. Ha fascinado a científicos a través de los años, siendo que Albert Einstein en la década de 1930 se refirió a ella como "espeluznante acción a distancia", dado a que no coincidía con las predicciones de su teoría de relatividad especial, y de hecho parecía implicar una comunicación a velocidades mayores a la de la luz, algo que la relatividad no permite, entendiendo hoy que esto no es cierto.

Conceptualmente, el entrelazamiento cuántico es el fenómeno físico que se observa cuando un grupo de partículas es generado y estas interactúan de manera que el estado cuántico de cada partícula no puede ser descrito independientemente del estado de las demás partículas, ni siquiera cuando a estas las separa una gran distancia. Es un concepto complicado, principalmente porque no se da en física clásica, y para un mejor entendimiento considero que un ejemplo es necesario, siendo el ejemplo más sencillo el de la teleportación cuántica. La teleportación cuántica es una técnica para enviar estados cuánticos a largas distancias en sin mandar la información directamente por un canal de comunicación cuántico, que relaciona el estado recibido al del remitente.

Alice y Bob trabajaron juntos y en ese tiempo crearon un par de qubits entrelazados, pero ahora viven en distintos puntos de universo y cada uno tiene un qubit del par entrelazado consigo. Años más tarde, Alice debe hacerle llegar a Bob un qubit  $|\Psi\rangle$ , pero ella no conoce el estado de ese qubit que debe enviar y además, únicamente puede enviar información clásica a Bob. Alice no puede determinar el estado en el que se encuentra el qubit, puesto que solo posee una copia del mismo y aun si pudiera, describirlo tomaría una cantidad infinita de información clásica: la tarea de Alice se ve casi imposible. Pero, sin embargo,

existe una solución: Alice hace interactuar el qubit que desea enviar con su qubit del par entrelazado que comparte con Bob, y luego mide ambos qubits. Después de la medición, Alice tiene uno de cuatro resultados posibles: 00, 01, 10 o 11. Le envía el resultado de la medida a Bob por un canal clásico y dependiendo de la información recibida, Bob realiza sobre su qubit del par entrelazado una de cuatro operaciones e, increíblemente, obtiene así el estado  $|\Psi\rangle$ . En la figura 1 se muestra un esquema de las operaciones que realizan ambos.

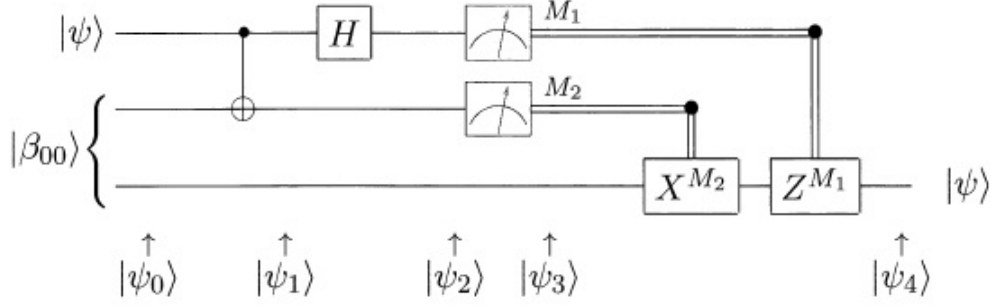


Figura 1: Esquema para la teleportación cuántica [12]

El estado  $|\beta_{00}\rangle$  representa el par entrelazado, de donde Alice tiene el primer qubit (el de más arriba en la figura) y Bob el segundo. Calculando entonces los estados intermedios  $|\Psi_i\rangle$ , asumiendo que  $|\Psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ , se tiene:

$$|\Psi_0\rangle = |\Psi\rangle \otimes |\beta_{00}\rangle \quad (29)$$

$$|\Psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[\alpha|0\rangle(|00\rangle + |11\rangle) + \beta|1\rangle(|00\rangle + |11\rangle)] \quad (30)$$

Para calcular  $|\Psi_1\rangle$ , veamos como altera el  $C_{NOT}$  a  $|\Psi\rangle$

$$|\Psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[\alpha|0\rangle(|00\rangle + |11\rangle) + \beta|1\rangle(|10\rangle + |01\rangle)] \quad (31)$$

Análogamente, la compuerta Haddamard afecta al qubit de Alice del par enlazado:

$$|\Psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[\alpha(|0\rangle + |1\rangle)(|00\rangle + |11\rangle) + \beta(|0\rangle - |1\rangle)(|10\rangle + |01\rangle)] \quad (32)$$

---

Reescribiendo la expresión  $|\Psi_2\rangle$

$$|\Psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|00\rangle(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) + |01\rangle(\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle) + |10\rangle(\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle) + |11\rangle(\alpha|1\rangle - \beta|0\rangle)] \quad (33)$$

Llegado este punto, Alice realiza una medida sobre su qubit del par enlazado y su copia del estado que quiere enviar.

$$|\Psi_3(00)\rangle \Rightarrow [\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle] \quad (34)$$

$$|\Psi_3(01)\rangle \Rightarrow [\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle] \quad (35)$$

$$|\Psi_3(10)\rangle \Rightarrow [\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle] \quad (36)$$

$$|\Psi_3(11)\rangle \Rightarrow [\alpha|1\rangle - \beta|0\rangle] \quad (37)$$

Donde la notación  $|\Psi_3(ii)\rangle$  se refiere al resultado obtenido al medir  $|\Psi_3\rangle$ .

De esta manera, Alice comunica el resultado de su medida y de acuerdo a lo que obtenga, Bob opera sobre su qubit del par enlazado: si el resultado fue 00, Bob no tiene que realizar ninguna operación puesto que ya tiene el estado  $|\Psi\rangle$ . Si en cambio obtiene 01, Bob simplemente debe aplicar la compuerta X dada por la ecuación (11) para obtener el estado. Si obtiene 10, puede arreglarlo realizando una compuerta Z, también tratada anteriormente en ecuación (12), y por último, si Alice mide 11, Bob debería aplicar primero una compuerta X y luego una Z. En todos los casos, Bob puede obtener el estado que Alice quería transmitirle.

---

## 1.7 Representación de estados

Previamente en la sección 1.2 la notación de estados vectoriales fue introducida, y posteriormente en la sección 1.3 como los operadores afectan a estos estados. En un caso más general, ya no es posible representar el estado de un sistema de manera vectorial. ¿Por qué no es posible? Porque, en general, no se conoce la descripción completa del sistema, solo se conoce un subsistema del mismo, como por ejemplo si el objeto de estudio es un sistema abierto, es decir, interactúa con el ambiente. A los estados asociados a estos sistemas se les llama estados mixtos, y cuentan con su propia representación dada por el operador matriz de densidad. La matriz de densidad es un operador en un espacio de Hilbert dado por:

$$\rho = \sum_i p_j |\Psi_j\rangle \langle \Psi_j| \quad (38)$$

$$0 \leq p_j \leq 1; \sum_j p_j = 1 \quad (39)$$

Donde  $p_j$  es el peso del estado  $|\Psi_j\rangle$  en el estado del sistema completo, de esta manera, se representa una mezcla estadística de estados puros. El valor esperado de un observable sobre este sistema, donde observable se entiende como cualquier propiedad física del sistema que pueda ser medida por un conjunto de operaciones físicas, está dado por las ecuación(40) y (41) donde  $Tr$  es el operador traza.

$$\langle A \rangle = \sum_j p_j \langle \Psi_j | A | \Psi_j \rangle = \sum_j p_j Tr(|\Psi_j\rangle \langle \Psi_j | A) = \sum_j Tr(p_j |\Psi_j\rangle \langle \Psi_j | A) \quad (40)$$

$$\langle A \rangle = Tr\left(\sum_j p_j |\Psi_j\rangle \langle \Psi_j | A\right) = Tr(\rho A) \quad (41)$$

Asimismo, la matriz de densidad de cualquier sistema cumple las siguientes propiedades

- $Tr(\rho)=1$
- $\rho$  debe ser hermítico, es decir  $\rho=\rho^\dagger$
- $\rho$  debe ser definido positivo,  $\langle \Psi \rho \Psi \rangle > 0 \forall \Psi$

---

En los casos en que el estado pueda ser representado por un vector se le denomina estado puro, y su matriz de densidad se obtiene fácilmente como  $\rho_\Psi = |\Psi\rangle\langle\Psi|$

## 1.8 Operador traza parcial

Otra herramienta necesaria en el desarrollo de este trabajo es el operador traza parcial. La traza parcial es un mapeo de las matrices de densidad  $\rho_{AB}$  en el espacio compuesto  $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$  a matrices de densidad  $\rho_A$  en el espacio  $\mathcal{H}_A$  y  $\rho_B$  en el espacio  $\mathcal{H}_B$ . Está definido como una extensión lineal del mapeo

$$Tr_B : S \otimes T \rightarrow Tr(T)S \quad (42)$$

Para cualquier matriz  $S$  en  $\mathcal{H}_A$  y  $T$  en  $\mathcal{H}_B$ . Sea  $\{|a_i\rangle\}$  una base de  $\mathcal{H}_A$  y  $\{|b_i\rangle\}$  una base de  $\mathcal{H}_B$ . Cualquier matriz  $\rho_{AB}$  en  $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$  puede ser descompuesta como  $\rho_{AB} = \sum_{ijkl} c_{ijkl} |a_i\rangle\langle a_j| \otimes |b_k\rangle\langle b_l|$  y su traza parcial con respecto a  $B$ :

$$Tr_B \rho_{AB} = \sum_{ijkl} c_{ijkl} |a_i\rangle\langle a_j| \otimes \langle b_k| |b_l\rangle \quad (43)$$

La cual es una matriz  $\rho_A$  en  $\mathcal{H}_A$ .

Un estado genérico de dos qubits  $\rho_{AB}$  puede ser expandido con respecto a la base ortogonal  $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$  como:

$$\rho_{AB} = \rho_{11} |00\rangle\langle 00| + \rho_{12} |00\rangle\langle 01| + \rho_{13} |00\rangle\langle 10| + \dots + \rho_{44} |11\rangle\langle 11| \quad (44)$$

Su traza parcial con respecto a  $B$  puede ser hallada con la ecuación(44):

$$\rho_A = (\rho_{11} + \rho_{22}) |0\rangle\langle 0| + (\rho_{13} + \rho_{24}) |0\rangle\langle 1| + (\rho_{31} + \rho_{42}) |1\rangle\langle 0| + (\rho_{33} + \rho_{44}) |1\rangle\langle 1| \quad (45)$$



---

## Capítulo 2: Errores en sistemas cuánticos

### 2.1 Sistemas abiertos

En el primer capítulo se presentaron las transformaciones unitarias que describen la evolución de un estado cuántico asociado a un sistema cerrado, esto es, que no interacciona con el ambiente. Pero en las computadoras cuánticas reales no es posible evitar esta interacción y los efectos del ruido externo al sistema se hacen notar. Surge entonces la necesidad de intentar disminuir el ruido indeseado del estado del sistema de interés: en este capítulo se presentan formas de modelar estas influencias externas.

### 2.2 Modelo de error

Una manera natural de describir la dinámica de un sistema cuántico abierto es considerar la existencia de dos sistemas: el sistema de interés, es decir, el sistema principal y el entorno, que en conjunto forman un único sistema cerrado. Suponiendo que el sistema de estudio tiene una matriz de densidad inicial  $\rho$  y que este pasa por una operación unitaria que interactúa con el ambiente  $\rho_{env}$ , el estado resultante del sistema principal en principio no se relaciona con el estado inicial a través de una única operación unitaria. Se asume, además, que el sistema principal no tiene más contacto con el ambiente una vez que pasa por la operación  $U$ , siendo el estado de entrada a  $U$  es de la forma  $\rho \otimes \rho_{env}$ .

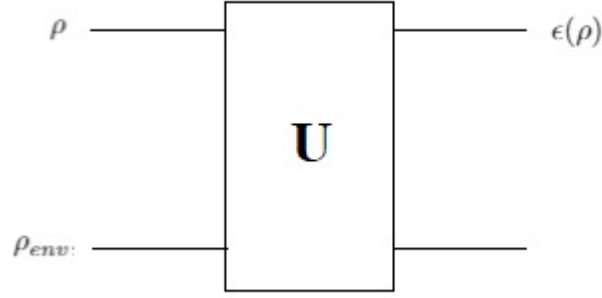


Figura 2: Modelo de operaciones en un sistema abierto

Una vez completada la operación, si se calcula la traza parcial como en la ecuación (43) de la matriz de densidad a la salida de la transformación  $U$ , se obtiene el estado resultante del sistema principal.

$$\epsilon(\rho) = Tr_{env}[U(\rho \otimes \rho_{env})U^\dagger] \quad (46)$$

Generalizando, una operación cuántica cualquiera puede ser representada como suma de operadores, la cual es una forma de reescribir la ecuación (46) únicamente en términos del sistema principal. Suponiendo que el conjunto  $|e_k\rangle$  forma una base ortonormal del espacio de Hilbert asociado al sistema principal, y que el ambiente comienza en alguno de esos estados base  $\rho_{env} = |e_0\rangle\langle e_0|$ , la ecuación (46) puede ser reescrita como:

$$\epsilon(\rho) = \sum_k \langle e_k|U(\rho \otimes |e_0\rangle\langle e_0|)U^\dagger|e_k\rangle = \sum_k E_k \rho E_k^\dagger \quad (47)$$

Donde  $E_k = \langle e_k|U|e_0\rangle$  es un operador del espacio del sistema principal, a la ecuación (47) se le conoce como representación en suma de operadores de  $\epsilon$ . La traza de  $\epsilon(\rho)$  debe cumplir:

$$1 = Tr(\epsilon(\rho)) \quad (48)$$

$$1 = Tr\left(\sum_k E_k \rho E_k^\dagger\right) \quad (49)$$

---


$$1 = \text{Tr}\left(\sum_k E_k E_k^\dagger \rho\right) \quad (50)$$

Como la ecuación (50) debe cumplirse para todo  $\rho$ , los operadores  $E_k$  deben cumplir  $E_k E_k^\dagger = I$ .

### 2.3 Error de depolarización de canal (*Depolarizing channel*)

Para el modelado, se distinguen dos tipos de error: el error por decoherencia, esto es por interacción con el ambiente, y el error sistemático, es decir, el error que aparece al utilizar un instrumento de medida que no es perfecto. Para representar un error de decoherencia, en este trabajo se utiliza un modelado de depolarizing channel, que es un modelo muy usado cuando no se tiene información alguna del tipo de error. El  $\epsilon(\rho)$  del modelo se presenta en la ecuación (51).

$$\epsilon(\rho) = p \frac{I}{2} + (1 - p)\rho \quad (51)$$

Este modelo de error cuenta con un solo parámetro  $p$ , el cual es una probabilidad y por tanto debe tomar valores entre 0 y 1.  $p$  es la probabilidad de una pérdida total de información, esto es, de comenzar con el estado  $\rho$  y terminar con el estado  $\frac{I}{2}$ , el cual tiene probabilidad 0.5 de proyectarse sobre cualquier vector de la base del espacio, es decir, toda la información del sistema original fue perdida.

### 2.4 Error sistemático: Matrices de giro

Además de el error por decoherencia asociado a la interacción del sistema con el ambiente, para este modelado pueden aparecer errores sistemáticos, al igual que las computadoras clásicas. Este tipo de error, que proviene muchas veces de la aplicación de compuertas defectuosas, generan un giro indeseado en los estados resultantes de la aplicación en una cierta dirección preferencial. Por ejemplo, una desviación de  $\gamma$  en la dirección X, se puede expresar como:

$$\epsilon(\rho) = G\rho G^\dagger, \text{ donde } G = e^{\gamma iX} \quad (52)$$

---

Debido a que estos errores tiene una dirección preferencial, en principio podrían ser corregidos, con una transformación unitaria en la dirección opuesta.

## 2.5 Índice Isotrópico

Para identificar y caracterizar los errores en un estado resultante de un algoritmo cuántico en un experimento real, se aplica el índice isotrópico definido en [13]. Este índice cuantifica y separa el error por decoherencia cuántica del error sistemático de la computadora el cual, en teoría, podría ser corregido.

Considerando la descomposición, que existe y es única, del estado mezcla resultante de un proceso ruidoso de  $n$  qubits:

$$\rho = p \frac{I}{2^n} + (1 - p)\hat{\rho}, \quad (53)$$

donde  $\hat{\rho}$  siempre queda definida como una matriz de densidad, y el estado puro de referencia de  $n$  qubits  $\rho_\phi = |\phi\rangle\langle\phi|$ , se define el doble índice isotrópico:

- La alineación isotrópica  $A$ ,

$$A = Fid(\hat{\rho}, \rho_\phi) - Fid(\hat{\rho}, \rho_{\phi^\perp}) \quad (54)$$

Donde  $Fid(a, b)$  es la fidelidad como definida en [14] entre los estados  $a$  y  $b$ , y  $\rho_{\phi^\perp}$  es el estado formado a partir de todos los estados ortogonales a  $|\phi\rangle$ ,  $\rho_{\phi^\perp} = \frac{I - |\phi\rangle\langle\phi|}{2^n - 1}$ .

- El peso isotrópico  $p=2^n\lambda$ , donde  $\lambda$  es el autovalor más pequeño de  $\rho$ .

La alineación  $A$  toma valores en el intervalo  $[-1,1]$ . Cuando está completamente alineado con el estado de referencia  $\phi$ ,  $A = 1$ , y cuando está completamente desalineado,  $A=-1$ . Por otro lado,  $p$  toma valores en el intervalo  $[0,1]$ : cuando el estado es en si mismo un estado

---

puro,  $p=0$ , mientras que para estados sin información alguna,  $p=1$ .

Como planteado en [15], si consideramos el estado puro de referencia  $|0\rangle$  y el estado  $\rho$  resultante de algún proceso ruidoso como:

$$\rho = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,4 \\ 0,4 & 0,5 \end{bmatrix}, \quad (55)$$

cuya descomposición es:

$$\rho = 0,2 \frac{I}{2} + 0,8 |+\rangle \langle +|, \quad (56)$$

donde  $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ . El peso  $p = 0,2$  y la alineación con el estado de referencia  $|0\rangle$  es de  $A = 0,5$ . La alineación con el estado de referencia  $|+\rangle$  sería de  $A = 0$ , lo que significa que el estado mezcla está alineado con  $|+\rangle$ . Para alinearlo con el estado de referencia  $|0\rangle$ , basta con rotarlo de acuerdo con la matriz  $G$  donde:

$$G = \frac{1}{\sqrt{2}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (57)$$

Aplicando  $G$  a  $\rho$ :

$$\rho' = G^\dagger \rho G = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0,9 & 0 \\ 0 & 0,1 \end{bmatrix} = 0,2 \frac{I}{2} + 0,8 |0\rangle \langle 0| \quad (58)$$

Ahora la alineación de  $\rho'$  con  $|0\rangle$  es de  $A = 1$ , o sea, se encuentra alineado con él.

## 2.6 QST: Tomografía de estado cuántico

La tomografía de estado cuántico (QST por su sigla en inglés), es el proceso por el cual se puede reconstruir un estado cuántico completo a partir del resultado de un conjunto de mediciones estadísticamente relevante. Para representar los distintos estados cuánticos, se hará uso de la esfera de Bloch. Si bien esta forma de visualizar estados solo es válida para estados de un qubit, resulta sumamente útil para comprensión del tema.

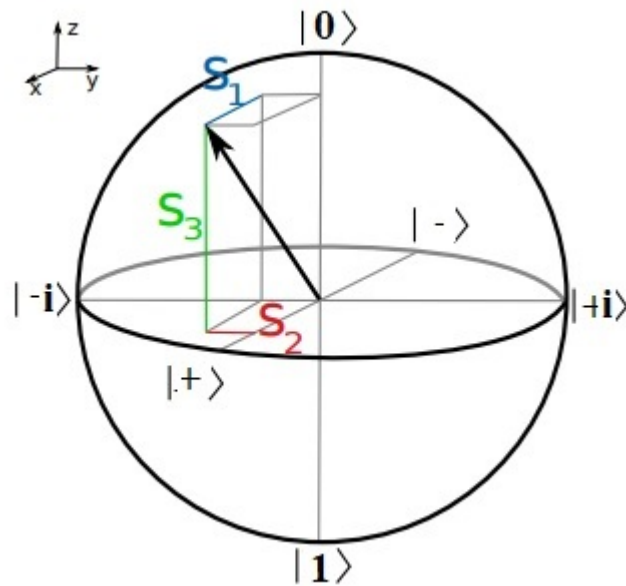


Figura 3: Representación de un estado genérico en la esfera de Bloch

Las cantidades  $S_i$  [16] en la figura muestran la magnitud de la proyección del estado sobre cada par de ejes, donde  $P_i$  denota la probabilidad de encontrar el sistema en el estado  $i$ :

$$S_1 = P_+ - P_- \quad (59)$$

$$S_2 = P_{+i} - P_{-i} \quad (60)$$

$$S_3 = P_0 - P_1 \quad (61)$$

Como cada  $S_i$  tiene una dirección del espacio asignada, dada por el sistema de referencia

---

(set de ejes en la esquina superior derecha de la figura 3), la notación que se usará será:  $S_1 = S_x$ ,  $S_2 = S_y$  y  $S_3 = S_z$ . De esta manera, teniendo las probabilidades de proyección, se puede reconstruir cualquier estado de un qubit siguiendo que:

$$\rho = \frac{1}{2}(I + Tr(\rho X)X + Tr(\rho Y)Y + Tr(\rho Z)Z) \quad (62)$$

$$\rho = \frac{1}{2}(I + S_x X + S_y Y + S_z Z) \quad (63)$$

donde las matrices  $X, Y, Z$  son los operadores de Pauli como se muestran en (7-10), para el término asociado a  $I$ , la amplitud es 1 y la segunda igualdad es válida por descomposición espectral de los operadores  $X, Y, Z$ .

Para el caso de  $n$  qubits, la generalización es bastante intuitiva, dónde  $N = 2^n$ :

$$\rho = \frac{1}{N} \sum_0^{N^2-1} Tr(\rho \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n) \sigma_1 \otimes \sigma_2 \otimes \dots \otimes \sigma_n \quad (64)$$

Donde  $Tr(\rho \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n)$  representa la probabilidad de proyección sobre una dirección del espacio dada por la combinación de algunas  $N^2$  direcciones del espacio. Por ejemplo en el caso de dos qubits son necesarias 16 proyecciones, una sobre cada uno de los conjuntos  $II, IX, IY, IZ, XI, XX, XY, XZ, YI, YX, YY, YZ, ZI, ZX, ZY, ZZ$ .

Si bien el método es muy sencillo, el mayor problema para reconstruir estados usando este método, más allá de ser un método estadístico que necesita de muchos experimentos

---

que aumentan con  $n$  en forma exponencial, es que existe la necesidad de proyectar en 3 bases distintas, lo que en la plataforma IBMQ no es posible ya que solo permite proyectar sobre la base  $Z$ . Para salvar este inconveniente se debe girar el estado de manera acorde, para que al medir con IBMQ, en realidad se mida en la base deseada. Por ejemplo, para proyectar en  $X$  la transformación que hay que hacer antes de medir es:

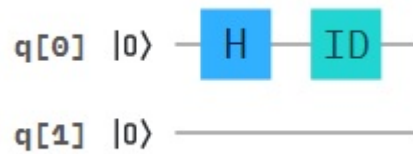


Figura 4: Transformación para proyectar sobre la base  $X$

Mientras que para proyectar en  $Y$  la transformación que se debe hacer antes de medir es:

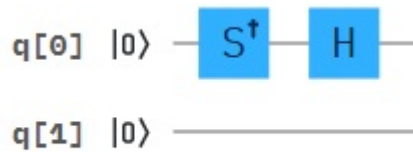


Figura 5: Transformación para proyectar sobre la base  $Y$



---

## Capítulo 3: Transformada de Fourier

### 3.1 DFT: Transformada discreta de Fourier clásica

La transformada discreta de Fourier es una de las herramientas más potentes de procesamiento de señales [17], que permite obtener el espectro de una señal temporal discreta. Es extremadamente útil para descubrir periodicidad en señales que no parecen ser periódicas, así como para encontrar y filtrar ruido no deseado en señales de todo tipo.

Suponiendo que se tiene una señal  $x(t)$  de tiempo continuo, con un ancho de banda acotado de  $B$ , si la señal se muestrea a una frecuencia  $f_s > 2B$  [18], en tiempo discreto se obtiene la ecuación(66) donde:  $f_s = \frac{1}{T_s}$ .

$$x[n] = x(t) \sum_n \delta(t - nT_s) \quad (65)$$

La transformada discreta de Fourier de la señal  $x[n]$  está dada por la siguiente expresión, donde  $N$  es el número total de muestras.

$$X(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j \frac{2\pi}{N} nk} \quad (66)$$

Que también puede ser calculado en forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ X[2] \\ \dots \\ X[N-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W & \dots & W^{N-1} \\ 1 & W^2 & \dots & W^{N-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & W^{N-1} & \dots & W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ \dots \\ x[N-1] \end{bmatrix} \quad (67)$$

---

Por ejemplo, supongamos que la señal de entrada es de la forma:

$$x(t) = 5 + 2 \cos(2\pi t - 90^\circ) + 3 \cos(4\pi t) \quad (68)$$

Como el ancho de banda de la señal es de 2Hz, basta con muestrearla a 4Hz para poder reconstruirla correctamente, de acuerdo al teorema de Shannon. Muestreando a esta frecuencia, se obtiene:

$$x[n] = 5 + 2 \cos\left(\frac{\pi}{2}(n - 1)\right) + 3 \cos(\pi n) \quad (69)$$

Para este caso, solo hay 4 muestras antes de que se repitan:

$$x[0] = 8, x[1] = 4, x[2] = 8, x[3] = 0 \quad (70)$$

Con la amplitud de las muestras se puede calcular la DFT mediante un método matricial, el cual prueba ser muy útil.

$$\begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ X[2] \\ X[3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ x[3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ -4j \\ 12 \\ 4j \end{bmatrix} \quad (71)$$

En las figura (figuras extraidas de [19]) se pueden ver  $x(t)$  y  $X[k]$  respectivamente.

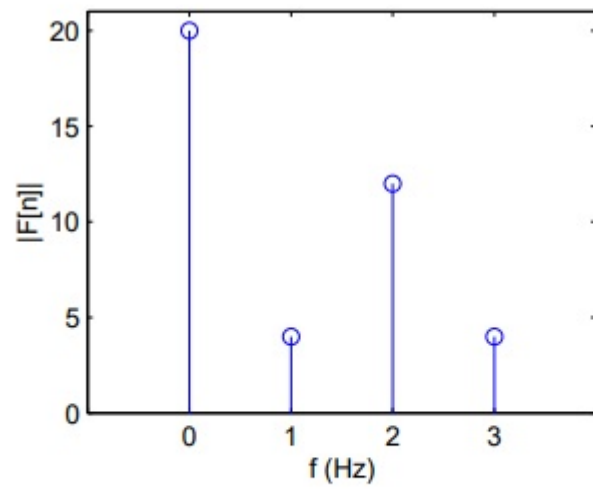
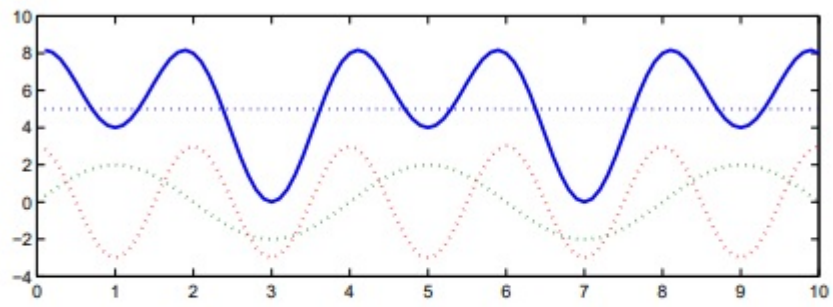


Figura 6: Señal  $x(t)$  y su correspondiente DFT

## 3.2 QFT: Transformada cuántica de Fourier

De la misma manera que se define la transformada de Fourier clásica discreta como en la ecuación (66), se puede definir la transformada cuántica de Fourier (QFT por su sigla en inglés). La diferencia esencial está en la notación asociada a la QFT.

$$|j\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i kn}{N}} |n\rangle \quad (72)$$

La acción de este operador sobre un estado arbitrario puede ser escrito como:

$$\sum_{j=0}^{N-1} x_j |j\rangle \rightarrow \sum_{n=0}^{N-1} y_n |n\rangle \quad (73)$$

donde las amplitudes  $y_n$  son las transformadas cuánticas de Fourier de amplitud  $x_j$ . De la misma manera que la transformada discreta de Fourier podía ser vista como un operador matricial, lo mismo es posible para su análogo cuántico.

Si el estado de entrada es de 2 qubits donde  $\chi = e^{\frac{i\pi}{2}} = i$

$$F_M = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \chi & \chi^2 & \chi^3 \\ 1 & \chi^2 & \chi^4 & \chi^6 \\ 1 & \chi^3 & \chi^6 & \chi^9 \end{bmatrix} \quad (74)$$

$$F_M = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{bmatrix} \quad (75)$$

Veamos, por ejemplo, el efecto de esta transformación sobre un estado de la base, como ser  $|00\rangle$

---


$$F_M |00\rangle = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (76)$$

Que puede fácilmente ser reescrito como:

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle) \quad (77)$$

Se puede ver entonces, como era de esperar, como una delta en un espacio temporal discreto se transforma al espacio frecuencial con todas las componentes, al igual que en el caso de la Transformada discreta de Fourier clásica.

### 3.3 Implementación del circuito cuántico

Dado a que las computadoras cuánticas de acceso libre de IBM trabajan con la representación en compuertas de circuitos cuánticos, es necesario convertir la matriz dada por la ecuación (73) a su equivalente en compuertas. Operando sobre la ecuación (74), esta puede ser llevada a una representación de productos.

$$|j_1, \dots, j_n\rangle \rightarrow \frac{(|0\rangle + e^{2\pi 0i \cdot j_n} |1\rangle)(|0\rangle + e^{2\pi 0i \cdot j_{n-1}j_n} |1\rangle) \dots (|0\rangle + e^{2\pi 0i \cdot j_1 j_2 \dots j_n} |1\rangle)}{2^{n/2}} \quad (78)$$

La equivalencia entre esta representación en producto y la definición original de la transformada lleva a la representación en compuertas de este circuito cuántico. Para ello, es necesaria una compuerta unitaria que será denotada  $R_k$  que se muestra en la ecuación (80) y la anteriormente presentada compuerta de Walsh-Hadamard.

$$R_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2\pi i/2^k} \end{bmatrix} \quad (79)$$

En la figura 7 se muestra el esquema completo del circuito cuántico para la transformada cuántica de  $n$  qubits.

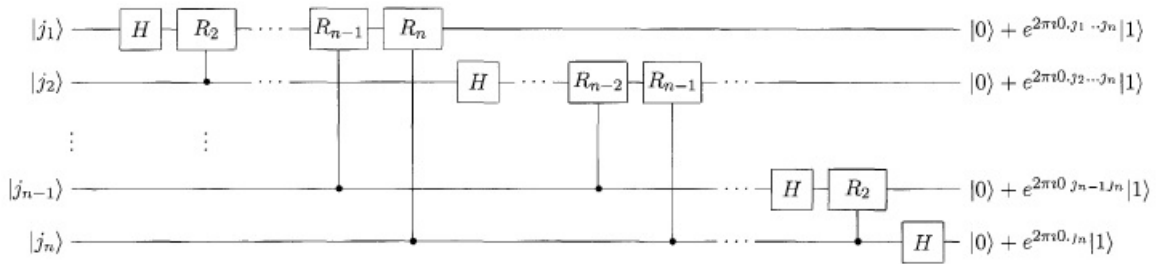


Figura 7: Circuito de la transformada cuántica de Fourier de  $n$  qubits

Como en este trabajo se estudia particularmente el caso de dos qubits, en la figura 8 se muestra una imagen de la implementación real del circuito en IBMQ.

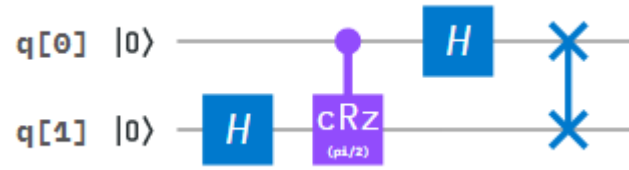


Figura 8: Implementación en IBMQ de la QFT de dos qubits

---

## Capítulo 4: Resultados experimentales

### 4.1 Reconstrucción de las matrices de densidad resultantes

En este capítulo se muestran los resultados experimentales. Como primera aproximación al problema, se implementó el circuito de la figura 8 en IBMq. Como al ejecutar un circuito en la plataforma se recibe un resultado estadístico (se corre cada sistema 8192 veces): el resultado obtenido es la cantidad de veces que al medir luego de la operación cuántica, se obtuvo cada uno de los elementos de la base (como se muestra en las figuras 4 y 5). Para poder de hecho modelar el error que tiene la computadora cuántica IBM qx4 Tenerife fue necesario reconstruir las matrices de densidad a la salida del circuito cuántico. Para ello se aplicó la tomografía cuántica de estado presentada en la sección 2.6, proyectando el estado resultante en 15 bases distintas. En la tabla 1 se presentan los resultados obtenidos, los resultados teóricos se presentan como estados vectoriales para su mejor visualización, siendo que llevarlos a representación en matriz de densidad es muy sencillo de acuerdo a la ecuación (5).



Tabla 1

Estado inicial	Resultado teórico	Matriz reconstruida
00⟩	0,5	0,36    0,29 + -0,0015i    0,25 - 0,059i    0,20 - 0,049i
	0,5	0,29 + 0,0015i    0,31    0,20 - 0,047i    0,021 - 0,050i
	0,5	0,25 + 0,059i    0,20 + 0,047i    0,18    0,14 - 0,00072i
	0,5	0,20 + 0,049i    0,21 + 0,050i    0,14 + 0,00072i    0,15
01⟩	0,5	0,38    0,059 - 0,29i    -0,093 - 0,085i    -0,080 + 0,058i
	0,5i	0,059 + 0,29i    0,29    0,051 - 0,085i    -0,070 - 0,065i
	-0,5	-0,93 + 0,085i    0,051 + 0,085i    0,19    0,030 - 0,14i
	-0,5i	-0,080 - 0,058i    -0,070 + 0,065i    0,030 + 0,15i    0,15
10⟩	0,5	0,32    -0,20 - 0,063i    0,25 - 0,069i    -0,17 - 0,0056i
	-0,5	-0,20 + 0,063i    0,28    -0,14 + 0,092i    0,22 - 0,060i
	0,5	0,25 + 0,069i    -0,14 - 0,092i    0,21    -0,14 - 0,043i
	-0,5	-0,17 + 0,0055i    0,22 + 0,060i    -0,14 + 0,043i    0,19
11⟩	0,5	0,34    0,0050 + 0,22i    -0,066 - 0,10i    0,064 - 0,043i
	-0,5i	0,0050 - 0,22i    0,31    -0,066 + 0,040i    -0,060 - 0,094i
	-0,5	-0,066 + 0,10i    -0,066 - 0,040i    0,18    0,0026 + 0,11i
	0,5i	0,064 + 0,043i    -0,060 + 0,094i    0,0026 - 0,11i    0,16

---

Se caracterizó el error con el índice de isotropía definido en la ecuación (54), y en la tabla 2 se muestran los correspondientes anchos y alineaciones isotropas para cada estado de entrada.

Tabla 2

Estado inicial	Alineación isotropa	Ancho isotropo
$ 00\rangle$	0.69	0.00023
$ 01\rangle$	0.34	0.043
$ 10\rangle$	0.56	0.066
$ 11\rangle$	0.22	0.15

## 4.2 Matrices de giro y parámetros para depolarizing channel

Utilizando herramientas del toolbox del simulador, se calcularon las transformaciones necesarias para llevar el resultado perfecto al experimental. Se debió realizar el proceso cuatro veces, puesto que la matriz de giro que debe actuar sobre el sistema depende de las cuatro entradas que ingresan a la transformada cuántica de Fourier. Así mismo, la decoherencia que sufren los estados resultantes está ligada a la entrada del sistema, y por tanto los parámetros de los canales depolarizantes que lo modelan, dependen de igual manera del estado inicial. En la tabla 3 se presentan las matrices de giro y los parámetros de los canales depolarizantes dados por  $p$  para cada caso.

Tabla 3

Estado inicial	Probabilidad $p$	Matriz de giro resultante			
$ 00\rangle$	0.036	$0,0078 - 0,0019i$	$0,16 - 0,041i$	$0,044 - 0,011i$	$0,95 - 0,23i$
		$0,17 - 0,040i$	$-0,00781 + 0,0019i$	$0,96 - 0,23i$	$-0,044 + 0,011i$
		$0,046 - 0,00023i$	$0,98 - 0,0049i$	$-0,0080 + 0,00004$	$-0,17 + 0,00087i$
		0,98	-0,046	-0,17	0,0081
$ 01\rangle$	0.275	$-0,18 - 0,25i$	$0,019 + 0,014i$	$0,56 + 0,77i$	$0,058 - 0,042i$
		$-0,016 + 0,017i$	$-0,23 - 0,21i$	$0,048 - 0,053i$	$0,70 + 0,64i$
		$0,93 + 0,19i$	$0,014 - 0,070i$	$0,31 + 0,062i$	$0,004 - 0,023i$
		-0,071	0,95	-0,024	0,31
$ 10\rangle$	0.128	$-0,0046 - 0,00015i$	$0,10 + 0,0032i$	$-0,046 - 0,0015i$	$0,99 + 0,033i$
		$0,097 - 0,027i$	$0,0044 - 0,0012i$	$0,96 - 0,27i$	$0,044 - 0,012i$
		$-0,043 - 0,014i$	$0,95 + 0,30i$	$0,0044 + 0,0014i$	$-0,096 - 0,030i$
		0,99	0,046	-0,10	-0,0046
$ 11\rangle$	0.440	$-0,16 - 0,24i$	$0,0087 - 0,0058i$	$0,53 + 0,79i$	$-0,029 + 0,019i$
		$0,0088 - 0,0056i$	$-0,16 - 0,25i$	$-0,029 + 0,018i$	$0,51 + 0,81i$
		$0,96 - 0,022i$	$0,00079 + 0,034i$	$0,29 - 0,0067$	$0,00024 + 0,010i$
		0,034i	0,96	0,010i	0,29

Teniendo entonces los datos para el modelo, en la figura 9 se presenta el modelo final completo. Los dos qubits extra que se muestran en la figura, son estados ancilla cuyo propósito es repetir el estado inicial, de manera de activar la matriz de giro  $U$  correspondiente para cada caso. De esta manera el modelo es independiente, es decir, no depende de que un usuario escoja el giro. Algo similar podría implementarse para el depolarizing channel como trabajo a futuro.

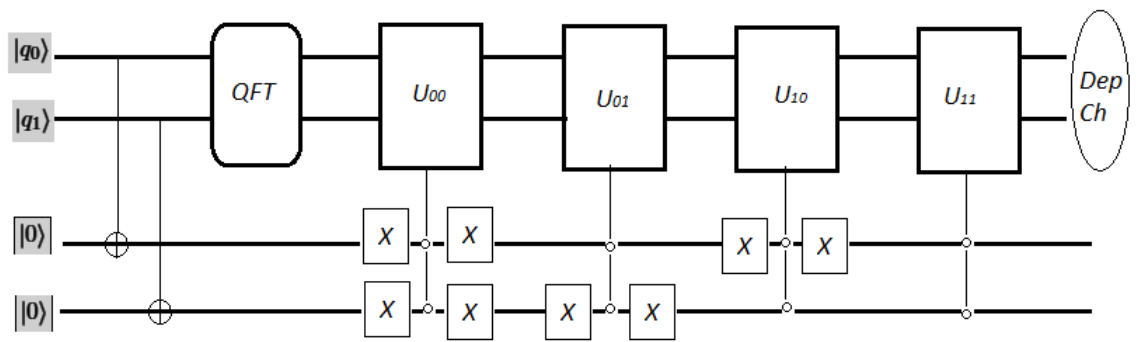


Figura 9: Modelo completo

Con el modelo implementado, en la tabla 4 se adjuntan las fidelidades del modelo para cada uno de los pares de parámetros y matrices de giro.

*Tabla 4*

Estado inicial	Fidelidad modelado vs IBMQ
$ 00\rangle$	0.9694
$ 01\rangle$	0.8593
$ 10\rangle$	0.9188
$ 11\rangle$	0.8064

---

### 4.3 Conclusiones

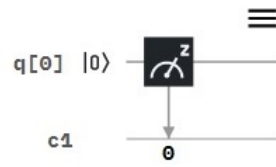
En este trabajo se modeló la propagación de errores en una computadora cuántica real, como lo es `ibmqx4`, una de las computadoras de IBMQ. Los estados mezcla resultantes del algoritmo de transformada cuántica de Fourier fueron encontrados a través del método de la tomografía de estado cuántico (QST). Mediante la caracterización usando un índice isotrópico el error fue modelado, en el cual la pérdida de información por decoherencia cuántica fue modelada como un canal depolarizante, y la desalineación a través de una rotación unitaria condicional.

Como se muestra en la tabla 2, no se puede atribuir un peso preferencial en el error total a los errores por decoherencia ni a los errores sistemáticos, siendo que ambos son bastante significativos. El modelo propuesto en la figura 9 se ajusta razonablemente bien a los datos (Tabla 3), más allá de errores asociados inherentemente a la tecnología disponible hoy en día. A futuro, cuando el error introducido por las compuertas disminuya razonablemente, este modelo puede ser el primer paso para correcciones de errores sistemáticos en sistemas cuánticos.

Como se puede observar en la tabla 3, el modelo se ajusta peor al caso en que el estado inicial es el  $|11\rangle$ , lo cual se debe a que la computadora cuántica utilizada introduce un error mucho más grande en el manejo de estados con algún qubit en  $|1\rangle$ . Una simple demostración de esto se puede ver en los resultados presentados en las figuras 10 y 11, donde se implementó una compuerta  $X$  en un qubit que inicialmente era  $|0\rangle$ , y se midió el resultado luego de la operación. Luego, se repitió la experiencia midiendo simplemente el estado  $|0\rangle$  sin la compuerta  $X$ .

---

Original circuit



Result

Histogram

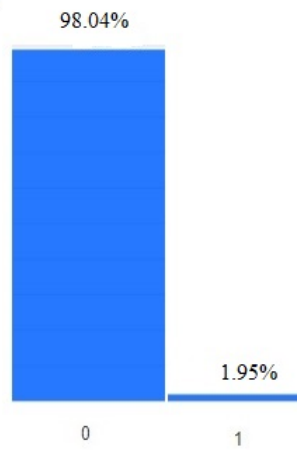
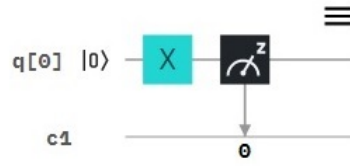


Figura 10: Resultado de medir el estado  $|0\rangle$

---

### Original circuit



### Result

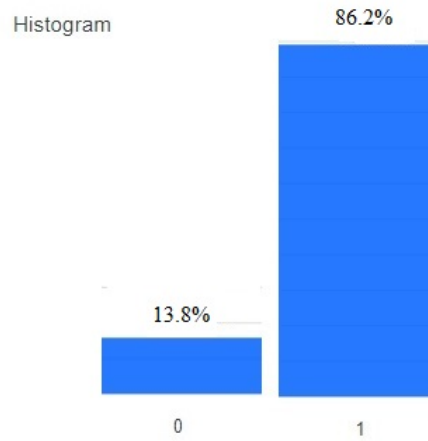


Figura 11: Resultado de medir el estado  $|1\rangle$

De estas últimas figuras se desprende que simplemente medir introduce un error mucho mayor en el caso que el estado tratado sea  $|1\rangle$  que en el caso de  $|0\rangle$ . Al arrastrar además el error que acarrear las distintas operaciones sobre los qubits, el error al final de todas las operaciones y de la medida en los casos de los estados iniciales en que alguno de los qubits es  $|1\rangle$ , es mayor que en el caso del estado inicial  $|00\rangle$ . Más allá de este efecto inevitable, el modelo se ajusta a los datos experimentales, pudiendo variar levemente su fidelidad en caso de nuevas series de datos, dado a que el estudio a partir del cual se calcularon las matrices de giro y los parámetros para los errores por decoherencia es estadístico.

## Referencias

- [1] Arute, F., Arya, K., Babbush, R. et al. "Quantum supremacy using a programmable superconducting processor". *Nature* 574, 505–510, 2019.
- [2] Shor, Peter W. "Polynomial-Time Algorithms for Prime Factorization and Discrete Logarithms on a Quantum Computer", *Proceedings of the 35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, Santa Fe, NM, 20–22 de Noviembre, 1994.
- [3] Grover, Lov K. "A fast quantum mechanical algorithm for database search" *Proceedings, 28th Annual ACM Symposium on the Theory of Computing (STOC)*, paginas 212-219, 1996.
- [4] David Collins, K. W. Kim, W. C. Holton, "Deutsch-Jozsa algorithm as a test of quantum computation", *American Physical Society (APS), Physical Review A Vol. 58*, 1998.
- [5] Feynman, R.P. "Simulating physics with computers." *Int J Theor Phys* 21, 467–488, 1982.
- [6] Shor P. W. et al. "Quantum Error Correction and Orthogonal Geometry". *Physical Review Letters* 78.3, 405–408, 1997.
- [7] Nielsen, Michael A. Chuang, Isaac L. "Quantum computation and Quantum Information", Cambridge University Press. ISBN 0521635039. Página 80. 2000. Traducido del inglés.
- [8] Nielsen, Michael A. Chuang, Isaac L. "Quantum computation and Quantum Information", Cambridge University Press. ISBN 0521635039. Página 81. 2000. Traducido del inglés.
- [9] Nielsen, Michael A. Chuang, Isaac L. "Quantum computation and Quantum Information", Cambridge University Press. ISBN 0521635039. Página 85. 2000. Traducido del inglés.
- [10] Nielsen, Michael A. Chuang, Isaac L. "Quantum computation and Quantum Information", Cambridge University Press. ISBN 0521635039. Página 94. 2000. Traducido del inglés



- [11] Einstein, A.; Podolsky, B.; Rosen, N." Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?". *Physical Review* 47: 777-780, 1935.
- [12] Nielsen, Michael A. Chuang, Isaac L. "Quantum computation and Quantum Information", Cambridge University Press. ISBN 0521635039. Página 27. 2000.
- [13] A. L. Fonseca de Oliveira, E. Buksman, Ilan Cohn, and J. García Lopez de Lacalle. "Characterizing error propagation in quantum circuits: the isotropic index." *Quantum Information Processing*, 16(2):48, 2017.
- [14] Nielsen, Michael A. Chuang, Isaac L. "Quantum computation and Quantum Information", Cambridge University Press. ISBN 0521635039. Página 409. 2000.
- [15] E. Buksman, A. L. Fonseca de Oliveira and C. Allende. "Performance and error modeling of Deutsch's Algorithm in IBMQ", arXiv:1912.07486 [quant-ph]. 2019.
- [16] A. Niggebaum, "Quantum State Tomography", Tesis de maestría en física de la Universidad Ludwig-Maximilians de Munich. 2011. [Online] [xqp.physik.uni-muenchen.de](http://xqp.physik.uni-muenchen.de)
- [17] S. Arar, "An Introduction to the Discrete Fourier Transform", 2017.[Online] <https://www.allaboutcircuits.com/technical-articles/an-introduction-to-the-discrete-fourier-transform/> Accedido el 18 de Noviembre de 2019.
- [18] Oppenheim, A. V with S. Hamid Nawab. "Signals and systems" 2nd ed. p. cm. - Prentice-Hall signal processing series ISBN 0-13-814757-4, 515, 1996.
- [19] Anónimo, "Lecture 7 - The Discrete Fourier Transform", Universidad de Oxford. [Online] <http://www.robots.ox.ac.uk/~sjrob/Teaching/SP/17.pdf> Accedido el 2 de diciembre de 2019.