

Estudio de modelos de error cuántico

Buksman, Efrain
Fonseca de Oliveira, André

Documento de Trabajo No. 5
Facultad de Ingeniería
Universidad ORT Uruguay
Julio, 2007
ISSN 1688-3217

Documento de Trabajo



Estudio de modelos de error cuántico

Efrain Buksman (Facultad de Ingeniería, Universidad ORT Uruguay)

André Fonseca de Oliveira (Facultad de Ingeniería, Universidad ORT Uruguay)

Documento de Trabajo No.5

Facultad de Ingeniería
Universidad ORT Uruguay

Julio, 2007

Estudio de modelos de error cuántico.

Efrain Buksman
André Fonseca de Oliveira

Facultad de Ingeniería - Bernard Wand Polak, Universidad ORT
Julio 2007

Sumario

En este artículo se hace una reseña del error producido por decoherencia como la interacción de un subsistema con el resto del sistema cerrado. Definimos también el error isótropo de decoherencia, como un error *Browniano*, en un qubit [1].

Keywords: Quantum computation, Decoherence, Quantum error models.

1. Introducción.

En las dos última décadas se han propuesto algoritmos cuánticos, entre ellos y quizás el más interesante, el algoritmo de Shor [2]. Este algoritmo consigue factorizar números primos en tiempos mucho menores que los algoritmos clásicos tradicionales. Estos algoritmos cuánticos están basados en los principios de la mecánica cuántica y necesitan de un computador cuántico para poder ser compilados, a diferencia los algoritmos clásicos que están basados en la máquina de Turing. Estos computadores cuánticos tienen una fuente de error diferente a los clásicos debido a su naturaleza cuántica probabilística, que deben ser corregidos para que el resultado final sea utilizable en la práctica.

Existe ya hace dos décadas un método para corregir estos errores, que propone un sistema de códigos correctores que utilizan la redundancia de información y que son similares a los correctores clásicos. Los correctores clásicos son muy utilizados, por ejemplo, en grabación de cd, transporte de datos en fibra óptica, etc. Sin embargo, el análisis clásico de la teoría de error es bastante diferente al análisis cuántico debido a tres factores:

a) Los errores son continuos a diferencia del error sobre el bit clásico (*bit-flip*).

b) Existe una limitación a la copia de un bit cuántico (qubit), el teorema de No-clonación (*Non-cloning theorem*).

c) La medida de un qubit destruye parte de su información. [3]

Pese a esto, existe una propuesta bien definida de un sistema de corrección que es totalmente tolerante a fallos (*Fault-tolerant quantum computation* [4, 5]), que consigue corregir errores independientes en cada qubit con una precisión determinada dada una cota fija al error de compuerta (*Threshold theorem*).

El artículo está organizado de la manera siguiente. Luego de una breve introducción en la segunda sección se detalla la representación cuántica utilizada, el *qubit* (equivalente cuántico del bit) y las operaciones que se pueden ejecutar sobre estos qubits (equivalentes a las compuertas lógicas clásicas). En la tercera sección se hará una pequeña reseña del modelo cuántico de error. En la cuarta sección se explica la manera de corregir alguno de estos errores y en la quinta sección se explicará el modelo isótropo en un qubit. Este artículo hace un resumen de los modelos de error, así como de códigos correctores e intenta formalizar un modelo isótropo de error definido en el artículo de Jesus Garcia et al [1].

2. Representación del estado cuántico y compuertas cuánticas.

El *qubit*, unidad de computación cuántica equivalente al bit clásico, se representa por un vector en el espacio de Hilbert $|\psi\rangle$. Su evolución en el tiempo viene dada por

por la ecuación de Schrödinger: $i\hbar \frac{d|\psi\rangle}{dt} = H|\psi\rangle$,

donde H es el Hamiltoniano del sistema cerrado que estamos considerando [3]. Esta transformación del estado $|\psi(t)\rangle$ en el tiempo, puede ser descrita, en un tiempo finito Δt por un operador:

$$U \equiv e^{-\frac{iH\Delta t}{\hbar}} |\psi\rangle,$$

donde U es un operador unitario; $UU^\dagger = I$, ya que el Hamiltoniano H es por definición un operador hermítico [4]. El estado cuántico de un único *qubit*, es un vector del espacio que tiene solamente dos estados discretos y se puede representar con dos complejos a, b y dos vectores $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ que forman una base ortogonal:

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle \quad (2.1)$$

donde $a, b \in \mathbb{C}$ y cumplen: $|a|^2 + |b|^2 = 1$. La fase de uno de estos complejos, es físicamente irrelevante. Los vectores de la base se pueden representar en un base estándar:

$$|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, |1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (2.2)$$

y los operadores que actúan sobre estos estados (qubits) por matrices en la misma base. Para un numero n de qubits se puede generalizar una representación del mismo tipo, por ejemplo, para un

2-qubits tenemos la generalización:

$$|\psi\rangle = a_{00}|00\rangle + a_{01}|01\rangle + a_{10}|10\rangle + a_{11}|11\rangle,$$

donde $a_{ij} \in \mathbb{C}$ y cumplen: $\sum_{i,j} |a_{ij}|^2 = 1$, la fase global es otra vez irrelevante.

Al igual que las compuertas clásicas se puede definir compuertas cuánticas, que serán, como dijimos matrices unitarias en cierta base. Por ejemplo, una matriz cualquiera (no necesariamente unitaria) de un qubit se puede expresar siempre como la suma de cuatro matrices elementales unitarias, X, Y, Z, I , siendo esta última la identidad. Estas matrices tiene una interpretación física sencilla; están asociadas a rotaciones alrededor de los mismos ejes y son llamadas matrices de Dirac ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ en alguna otra notación [3]). La transformación X es equivalente a la NOT clásica y se define como:

$$X \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

esta intercambia los coeficientes de los vectores de la base (*bit flip*):

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix},$$

La otra transformación no tiene equivalente clásica y se define como un cambio de fase de 180° en el segundo vectores (*phase flip*):

$$Z \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

Aplicada sobre la base estándar se obtiene:

$$Z \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ -b \end{bmatrix}.$$

De igual manera se define Y , $Y \equiv \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$, que puede ser escrita como producto de las dos últimas;

$$Y = iXZ.$$

Así como existe un teorema clásico que demuestra que con un conjunto clásico de compuertas (e.g. AND, OR, NOT) se puede computar cualquier función clásica de n -bits, se puede demostrar que existe un conjunto *universal* de compuertas cuánticas elementales. O sea, cualquier transformación unitaria de n qubits se puede expresar por un circuito cuántico que incluya solamente a estas compuertas [5]. Uno de estos conjuntos universales (existe mas de uno), consta de las matrices anteriores de 1-qubit y de la compuerta CNOT de 2-qubit, (*controlled-NOT*) que es equivalente al XNOT clásico y que se define en la base estándar como:

$$U_{\text{CNOT}} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

La representación gráfica de estas compuertas es análoga a la clásica, por ejemplo, la compuerta anterior se representa:

Como se ve en la figura 1, si bien a la entrada de la compuerta tenemos dos qubits independientes, no

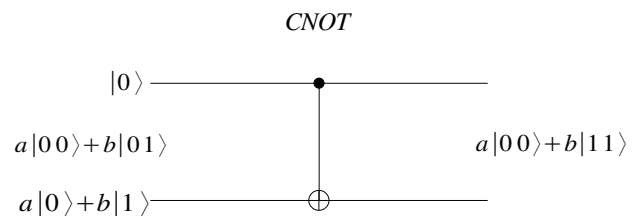


figura 1

podemos expresar el resultado de salida de la compuerta como producto tensorial (ó de Kronicker) de dos qubits. A este tipo de estado se le llama estado *entrelazado* [3], y es

un efecto cuántico que no tiene análogo clásico.

Se dice que un estado está entrelazado, cuando no puede ser expresado como producto tensorial de los qubits componentes. El entrelazamiento es una correlación muy fuerte que proviene de ciertas interacciones físicas entre qubits, nótese que si medimos el primer qubit, con resultado 0 (ó 1) obligamos al segundo qubit a ser exactamente 0 (ó 1) con probabilidad 1, se dice que este estado esta totalmente entrelazado.

La otra transformación relevante en la computación cuántica es la medida. El problema de la medida de una magnitud física en el formalismo cuántico es muy discutida y es representada de distinta manera en las diferentes interpretaciones existentes [6,7]. La interpretación mas antigua y mas usada en la mecánica cuántica es la interpretación probabilística de Copenhagen [6]. En ésta interpretación se dice que el proceso de medición *colapsa* el estado $|\psi\rangle$, o sea, la transformación lo proyecta a un cierto subespacio. Por ejemplo, luego de la medida de un único qubit, se obtiene uno y uno solo de los estados de la base, relacionado al aparato de medida, siendo que antes de la medida existe cierta probabilidad de obtener cualquiera de los dos estados.

Para el qubit genérico: $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ el cuadrado de la norma de a representa la probabilidad de obtener a priori el estado $|0\rangle$ mientras que el cuadrado de la norma de b la probabilidad de obtener (a priori) el estado $|1\rangle$. Sin embargo, luego de efectuada la medida se obtendrá solamente uno de los dos estados $|0\rangle$ ó $|1\rangle$. Para el caso general de un n-qubit, la medida se puede describir por un conjunto de operadores M_m relacionados al aparato de medida en si, donde el índice m es una de las posibilidades de salida del experimento, relacionada al estado resultante $|m\rangle$. La probabilidad de obtener este estado previo a la medida es: $p(m) = \langle \psi | M_m^\dagger M_m | \psi \rangle$,

siendo el estado resultante igual a: $|m\rangle = \frac{M_m |\psi\rangle}{\sqrt{p(m)}}$.

Los estados que definimos anteriormente son estados *puros* (entrelazados o no), pero existe otro tipo de estado: el estado *mezcla*. Este estado es como lo insinúa su nombre una mezcla *estadística* de estados puros, por ejemplo, se puede generar un estado de 1-qubit, que sea 50% de las veces $|0\rangle$ y 50% de la veces $|1\rangle$, este estado mezcla se puede escribir como: $|\varphi\rangle = \frac{1}{2}(|0\rangle \oplus |1\rangle)$, nótese que la suma de la normas al cuadrado de los coeficientes del vector es siempre menor que uno, a

diferencia del estado puro $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$. En general se puede definir un estado mezcla como un ensamble de estados puros: $|\varphi\rangle = \sum_i p_i |\psi_i\rangle$, que cumplen: $\sum_i p_i = 1$.

3. Descripción del error.

Para modelar el error debemos comprender este proceso desde el punto de vista de la mecánica cuántica, o sea, la interacción entre el sistema principal que queremos medir y el ambiente (proceso de

decoherencia). Este sistema principal que queremos estudiar es microscópico mientras que el entorno o ambiente es mayor en varios ordenes de magnitud (macroscópico). Esta interacción sobre el sistema total (sistema principal+ambiente) el cual supondremos cerrado, deberá ser representada según los principios de la mecánica cuántica por un operador unitario. Así el problema consiste en reconocer el resultado de una interacción “vista” solamente desde una pequeña parte del sistema total. A este proceso de perdida de información se le llama *decoherencia* [8].

Para determinar el resultado de esta interacción conviene trabajar con otra representación del estado, equivalente a la representación vectorial ($|\psi\rangle$): la representación matricial, la *matriz densidad*, definida por:

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi|,$$

donde $\langle\psi| = [a^* \ b^*]$ representa el vector transpuesto conjugado de $|\psi\rangle = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$.

Por ejemplo, para 1-qubit $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$, la matriz densidad que representa el estado $|\psi\rangle$ es:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \otimes [a^* \ b^*] = \begin{bmatrix} a a^* & a b^* \\ a^* b & b b^* \end{bmatrix},$$

donde el símbolo \otimes , representa el producto tensorial. Una transformación unitaria de esta matriz, queda definida por una nueva matriz densidad ρ' ; $\rho' = U \rho U^\dagger$. Para la generalización de los postulados de la mecánica cuántica en esta notación matricial del estado véase por ejemplo [3].

Ahora podemos determinar el estado principal luego de una interacción con el entorno. Dado un sistema compuesto AB , por dos sub-sistemas A y B , la matriz densidad que representa el estado del sub-sistema A es

igual a la *traza parcial* (*reduced density or partial trace*) en los estados de B , o sea:

$\rho^A = \text{tr}_B(\rho^{AB})$, que en cierta base: $\{|a_i\rangle\}, \{|b_i\rangle\}$ se define como:

$$\rho^A = \text{tr}_B(\rho^{AB}) = \sum_{ij} |a_i\rangle\langle a_j| \langle b_i|b_j\rangle$$

Por ejemplo, tomemos el estado entrelazado (sistema + entorno):

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_{\text{sis}}0_{\text{ent}}\rangle + |1_{\text{sis}}1_{\text{ent}}\rangle), \quad (3.1)$$

la matriz densidad se puede escribir entonces como:

$$\rho = \frac{1}{2}(|00\rangle\langle 00| + |01\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10| + |11\rangle\langle 11|)$$

luego se toma la traza parcial sobre el segundo qubit (el entorno): $\rho^{\text{sis}} = \text{tr}_2(\rho)$ dando:

$$\rho^{\text{sis}} = \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) = \frac{I}{2}. \quad (3.2)$$

Esta matriz densidad corresponde a un estado mezcla:

$$|\varphi\rangle = \frac{1}{2}(|0\rangle \oplus |1\rangle) \quad (3.3)$$

(hay que aclarar que esta relación para estados mezcla, no es unívoca como lo es para estados puros [3]).

Nótese que la interacción con el ambiente transformo el estado puro original en un estado con menos información: un estado mezcla. Aunque estos dos estados

$|\psi\rangle$ y $|\varphi\rangle$ se parezcan a la hora de hacer una única medición, estos son bien diferentes. Por ejemplo, tomemos el espín de un electrón y un aparato de Stern-Gerlach posicionado sobre el eje z . El estado se puede representar como: $|\psi\rangle = a|0\rangle_z + b|1\rangle_z$, sin embargo existe una dirección determinada (en el espacio real) por el vector

\vec{u} tal que si posicionamos el aparato y medimos en esa dirección obtenemos el estado $|0\rangle_u$ con probabilidad 1. Para el estado mezcla $|\varphi\rangle = |a|^2|0\rangle \oplus |b|^2|1\rangle$ no existe dirección alguna del espacio para la cuál obtenemos 100% de probabilidad para ninguno de los dos estados.

La matriz densidad nos permite trabajar tanto con estados mezcla como con estados puros, estos se diferencian por la traza del cuadrado de su densidad: $\text{tr}(\rho_{\text{puro}}^2) = 1, \text{tr}(\rho_{\text{mezcla}}^2) < 1$, siendo que la traza de cualquiera de los dos tipos de estado es igual a 1;

$\text{tr}(\rho_{\text{puro, mezcla}}) = 1$. El echo que el resultado de una interacción sea un estado mezcla, esta estrechamente relacionado con el echo que el estado de 2-qubits del cual partimos estaba entrelazado (3.1), entrelazamiento que podría haber sucedido, por ejemplo, debido a una interacción CNOT del primer qubit con su entorno, de

qubits qubits originalmente independientes (como se muestra en la figura 1).

En general se define el error como una interacción que desconocemos, de nuestro sistema con el entorno, como una transformación unitaria U sobre el sistema total (principal + entorno). El efecto de la interacción sobre el sistema principal será definido con la traza parcial como:

$$\rho' = \text{tr}_{\text{entorno}}[U(\rho \otimes \rho_{\text{ent}})U^\dagger],$$

que descrito en una cierta base ortonormal del ambiente $\{|e_i\rangle\}$, se puede reescribir como:

$$\rho' = \sum_k \langle e_k|U(\rho \otimes |e_0\rangle\langle e_0|)U^\dagger|e_k\rangle = \sum_k E_k \rho E_k^\dagger,$$

donde E_k es un operador que aplica sobre el sistema principal, definido por:

$$E_k \equiv \langle e_k|U|e_0\rangle,$$

donde k es un índice de la base del entorno y $|e_0\rangle$ el estado inicial del ambiente. Se puede demostrar que

debido a que la matriz U es unitaria:

$$\sum_k E_k E_k^\dagger = I.$$

A esta representación del error a través de operadores E_k que dependen del ambiente (que por lo general desconocemos), pero que actúan sobre el sistema principal y que podemos modelar en base a ciertas hipótesis generales, se le llama representación de suma (*operator-sum representation*) [3, 9].

Existe una interpretación física de una interacción con el ambiente, en la descripción de operadores suma. Calculemos la probabilidad de obtener el valor k , en una medida de los qubits del ambiente, o sea :

$p(k) = \text{tr}(E_k \rho E_k^\dagger)$ obtenemos luego de la medida, el estado normalizado del sistema principal:

$$\rho_k = \frac{E_k \rho E_k^\dagger}{\text{tr}(E_k \rho E_k^\dagger)} \quad \text{por lo que el estado del sistema luego}$$

de la interacción se puede escribir:

$$\rho' = \sum_k p(k) \rho_k,$$

este ρ' es un estado mezcla. La interacción toma el estado ρ y lo convierte en su valor medio, o sea, una mezcla de estados ρ_k con probabilidades $p(k)$.

En la vida real, existen varias tecnologías que se utilizan para generar y operar sobre los qubits (fotónica, trampa de iones, NMR, etc) [3], Los modelos de error que se utilizan son los relevantes a cada tecnología y a los errores típicos que puede ocurrir debido al ambiente. Así los operadores E_k modelan el error, ó ruido, que

esperamos encontrar en cada caso particular. Si nos restringiremos a un error de decoherencia que se aplica independientemente a cada qubit (solamente a uno por vez en el tiempo), cada uno de estos operadores de un qubit E_k siempre se pueden expresar como la suma:

$$E_k = a_I I + a_X X + a_Z Z + a_{XZ} XZ, \quad (3.3)$$

donde los coeficientes son números complejos a determinar (I, X, Y, Z forman una base en el espacio de las matrices 2×2). Los modelos de error de decoherencia para un solo qubit en un canal con ruido, mas comúnmente tratados en la literatura, son:

a) El error de cambio de bit (*bit flip channel*). Este se describe, con una probabilidad p que no se modifique el sistema y una probabilidad $1-p$ de que exista un cambio de bit, en este caso:

$$E_0 = \sqrt{p} I, \quad E_1 = \sqrt{1-p} X,$$

o sea en la representación suma:

$$\rho' = E_0 \rho E_0 + E_1 \rho E_1 = p I \rho + (1-p) X \rho X.$$

Este error es análogo al que se produce en un canal de comunicación clásico con ruido aleatorio en un bit.

b) El ruido de cambio de fase (*phase flip channel*):

$$\rho' = p I \rho + (1-p) Z \rho Z, \quad (3.4)$$

no tiene análogo clásico. También se puede expresar el ruido que produce un cambio conjunto de bit y de fase (*bit-phase flip channel*):

$$\rho' = p I \rho + (1-p) Y \rho Y.$$

c) Otro modelo muy usado es el ruido despolarizador (*depolarizing channel*):

$$\rho' = p \frac{I}{2} + (1-p) \rho. \quad (3.5)$$

Que se puede escribir en la notación de operadores suma, notando que:

$$\nabla \rho: \frac{I}{2} = \frac{1}{4} (\rho + X \rho X + Y \rho Y + Z \rho Z) \quad \text{por tanto:}$$

$$\rho' = (1-p) \rho + \frac{p}{3} (X \rho X + Y \rho Y + Z \rho Z).$$

Este error modela un ambiente que no distingue las distintas direcciones del espacio.

d) Un ruido importante es el que existe en un sistema principal, cuando este disipa energía además de perder información, llamado de amortiguación de amplitud (*amplitud damping*). Un proceso de este tipo ocurre, por ejemplo, cuando se quiere separar un haz de fotones por reflexión y transmisión al hacerlo pasar por un *beam splitter*. Aparece entonces un error (en el calculo) si el fotón es absorbido por el *beam splitter*, o sea, se pierde energía. En estos casos el error se puede describir con dos operadores:

$$\rho' = \varepsilon(\rho) = E_0 \rho E_0 + E_1 \rho E_1$$

donde: $E_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\gamma} \end{bmatrix}$ y $E_1 = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{\gamma} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,

y γ se puede interpretar como la probabilidad de perder un fotón.

d) El ruido llamado de amortiguación de fase (*phase damping*) no tiene análogo clásico y representa una pérdida de información sin pérdida de energía. Esto ocurre por ejemplo en un cambio de fase de *scattering* de un fotón por choques con átomos de la red cristalina. Este ruido se puede describir por el error definido anteriormente (3.4) (*phase flip channel*), donde la probabilidad de que ocurra un cambio de fase: $p = \sqrt{1/2(1-\sqrt{1-\lambda})}$, esta relacionada con λ ; la probabilidad de que el fotón colisione (*scattered*) en la red. Por último describiremos por separado un error de tipo *browniano*, que aquí llamaremos de error isótropo.

4. Modelo de error isótropo Browniano en un qubit.

Un qubit se puede representar geoméricamente como un punto sobre la esfera de Bloch. El estado genérico de un qubit:

$$|\psi\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle, \quad (4.1)$$

se representa en una esfera en la figura 2.

Se puede demostrar fácilmente que existe una relación entre el vector posición \vec{u} en el espacio real con su matriz densidad ($\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$):

$$\rho = \frac{I + \vec{u} \cdot \vec{\sigma}}{2}, \quad (4.2)$$

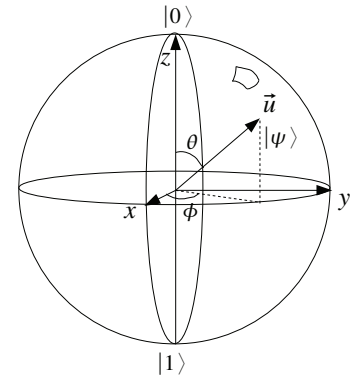


figura 2

donde $\vec{\sigma}$ está definido por las matrices de Dirac:

$$\vec{\sigma} = X \hat{x} + Y \hat{y} + Z \hat{z}.$$

La pregunta que surge inmediatamente es: ¿cómo se determina la distancia entre dos qubits?, aunque existe más de una distancia que se puede definir [] es común definir primero la *fidelidad* entre dos qubits, entre las matrices densidad que los representan, como:

$$F(\rho, \rho') = \text{tr}[(\sqrt{\rho} \rho' \sqrt{\rho})^{1/2}],$$

aunque esta definición no parezca simétrica, lo es, y se puede demostrar fácilmente que en el caso que uno de los estados sea puro, $|\psi\rangle$, $\rho' = |\psi\rangle\langle\psi|$:

$$F(\rho, \psi) = \sqrt{\langle\psi|\rho|\psi\rangle} \quad (4.3)$$

la distancia entre dos qubits se define entonces como [3]:

$$D(\rho, \rho') = \arccos F(\rho, \rho') \quad (4.4)$$

Ahora podemos encontrar una transformación unitaria, partiendo de una rotación de ángulo α , $R(\alpha)$ en una dirección arbitraria, del vector real \vec{u} :

$$\vec{u}' = R(\alpha)\vec{u}$$

$$\text{tal que: } \rho' = \frac{I + R(\alpha)\vec{u} \cdot \vec{\sigma}}{2} = \frac{I + \vec{u} \cdot U \vec{\sigma} U^\dagger}{2},$$

luego:

$$R(\alpha)\vec{u} \cdot \vec{\sigma} U = \vec{u} \cdot U \vec{\sigma} \quad (4.5)$$

siendo U una matriz unitaria:

$$U = \begin{bmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{bmatrix},$$

con $a, b \in \mathbb{C}$, $aa^* + bb^* = 1$, que se pueden calcular usando las ecuaciones (4.5). Se puede ver fácilmente que la distancia $D(\rho, \rho')$ (definida a través de la fidelidad) entre los estados ρ y ρ' depende solamente de α :

$$D(\rho, \rho') = \frac{\alpha}{2}.$$

El error isótropo aleatorio se describe como un proceso múltiple en el cual para cada tiempo t_1, t_2, \dots, t_n (infinitesimal), se produce una transformación unitaria estocástica, que rota el vector \vec{u} en un ángulo distribuido por una función de probabilidad que depende únicamente de ese ángulo. De modo que dos transformaciones cualquiera a tiempos diferentes son completamente independientes, (sin correlación entre ellas), por lo que se llama error isótropo aleatorio [1, 10].

Este proceso es similar a un movimiento Browniano de una macropartícula en un gas que se describe por una ecuación de Langevin [10]:

$$M \ddot{q} + M \gamma \dot{q} = F(t),$$

donde q es por ejemplo la posición de la partícula, γ un

coeficiente que representa la fricción y $F(t)$ una fuerza aleatoria que ejercen las otras moléculas.

El estudio cuántico del movimiento Browniano es bastante conocido en la literatura ([10, 11]). Entre otras cosas es posible demostrar que este proceso (para nosotros error isótropo) se puede escribir como la traza parcial de una interacción unitaria que actúa sobre todo el sistema. Esta traza parcial (ó *densidad reducida*) cumple con una ecuación de evolución que es una generalización aproximada de la ecuación de Langevin.

5. Sumario y trabajo futuro.

La importancia de este modelo de error radica en que se le puede generalizar para n qubits [1]. La mayoría de los estudios existentes, y los teoremas de cota (*threshold theorems*) demostrados [3, 13, 14] están basados en errores independientes de un qubit por ser estos más simples de trabajar.

Pero estos modelos no se justifican en ciertos casos prácticos. Este modelo de error isótropo nos permite trabajar con simulaciones numéricas por ejemplo, en dos qubits (en forma no independiente).

El entrelazamiento parece ser la base física de la potencia del software cuántico, tanto en el algoritmo de factorización de Shor como en el algoritmo de Grover (búsqueda en una base no estructurada), por lo que el error de decoherencia producido sobre un estado entrelazado podría arruinar todo el cálculo. Como trabajo futuro, proponemos abordar el error de decoherencia de un 2-qubit. Este problema es muy complejo pero debe ser abordado en el caso de que queramos resolver problemas más realistas.

Bibliografía:

- [1] J. García-López; F. García-Mazarío: *Modelos de error en Computación Cuántica* :Internal report UPM (2003) <http://www.eui.upm.es/~jglopez>.
- [2] P. W. Shor. *Polynomial-time algorithms for prime factorization and discrete logarithms on quantum computer*. SIAM J. Comp., 26 (5):1484 - 1509, (1997).
- [3] Michael A. Nielsen; Isaac L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge University Press (2000).
- [4] W. H. Zurek; R. Laflamme. *Quantum logical operations on encoded qubits*. Phys. Rev. Lett., **77** (22): 4683-4686 (1996).
- [5] Dorit Aharonov, Alexei Kitaev and John Preskill, *Fault-Tolerant Quantum Computation with Long-Range Correlated Noise*. Phys. Rev. Lett. **96** 050504 (2006).
- [6] Roland Omnès: *The interpretation of Quantum Mechanics*. Princeton University Press (1994).
- [7] Auletta, G. *Foundations and Interpretation of Quantum Mechanics*. Singapore: World Scientific, (2000).
- [8] M. Schlosshauer, *Decoherence, the measurement problem, and interpretations of quantum mechanics*. Rev. Mod. Phys. 76, 1267-1305 (2004). [arXiv:quant-ph/0312059v4](http://arxiv.org/abs/quant-ph/0312059v4).
- [9] Tong, D. M.; Kwek, L. C.; Oh, C. H.; Chen, Jing-Ling; Ma, L. *Operator-sum representation of time-dependent density operators and its applications*. *Physical Review A* 69, 054102 (2004).
- [10] Walter T. Strunz. *Stochastic pure states for quantum Brownian motion*. New Journal of Physics 7 91 (2005).
- [11] Eisert, J.; Plenio, M.B. *Quantum classical correlations in quantum brownian motion*. Phys. Rev. Lett. 89 (2002) 137902.
- [12] Gaioli, F. H.; Garcia Alvarez, E. T.; Guevara, *Quantum brownian motion*. Int. J. Theor. Phys. 36 2167-2207 (1997).
- [13] Gottesman, D. *Stabilizer codes and quantum error correction*. Ph. D. thesis, California Institute of Technology, (1997).
- [14] Kitaev, A.Y. *Fault-tolerant quantum computation by anyons*. Annals Phys. 303 (2003) 2-30.