

Universidad ORT Uruguay
Instituto de Educación

**Abordaje metodológico de la enseñanza de la
Geometría en Bachillerato**

Entregado como requisito para la obtención del título de Master en Educación

Patricia Vedovatti Arias – 175268

Tutor

Mag. Ariel Fripp Rainiere

2013

Declaración de autoría

Yo Patricia Vedovatti Arias declaro que el presente trabajo es de mi autoría. Puedo asegurar que:

El trabajo fue producido en su totalidad mientras realizaba el Master en Educación en la Universidad ORT

En aquellas secciones de este trabajo que se presentaron previamente para otra actividad o calificación de la universidad u otra institución, se han realizado las aclaraciones correspondientes;

Cuando he consultado el trabajo publicado por otros, lo he atribuido con claridad;

Cuando cité obras de otros, he indicado las fuentes. Con excepción de estas citas, la obra es enteramente mía;

En el trabajo, he acusado recibo de las ayudas recibidas;

Ninguna parte de este trabajo ha sido publicada previamente a su entrega.

A handwritten signature in black ink, reading "Patricia Vedovatti". The signature is written in a cursive, flowing style.

Patricia Vedovatti

24 de setiembre de 2013

Agradecimiento

A Pablo, compañero de vida, compañero de viaje,... gracias.

Porque sin sus palabras de aliento a pesar de las largas esperas, porque sin su apoyo incondicional, esta aventura no hubiera sido posible.

Abstract

En el siguiente trabajo se caracterizan las prácticas de enseñanza de la Geometría en Bachillerato y se atienden las valoraciones que los docentes hacen acerca del empleo de recursos didácticos en sus aulas. Se investigan las metodologías de enseñanza mayormente empleadas por ellos en los cursos más avanzados de Educación Secundaria, en particular su postura respecto al abordaje de las demostraciones geométricas.

Por medio del empleo de una metodología de investigación mixta se buscó recoger datos que permitieran caracterizar y describir las principales metodologías de abordaje de la Geometría en Bachillerato.

Para ello se recurrió a un análisis documental de planes y programas oficiales, lo que condujo a la aplicación posterior de una encuesta a docentes. Se diseñó también una entrevista aplicada a un grupo de profesores y se realizó en forma casi paralela estudio de la bibliografía elaborada por ellos. Se llevó a cabo también una entrevista a un actor calificado –Inspector de Matemática- quien aportó datos relevantes al momento de la triangulación.

A partir del estudio realizado, en este trabajo fue posible caracterizar las prácticas de enseñanza de Bachillerato en: prácticas de representación material, prácticas de transformación y práctica invisible.

Índice de contenido

1. Introducción.....	8
2. Marco Teórico	12
2.1. El aprendizaje y la enseñanza como transformaciones no lineales del saber	12
2.2. El contexto, espacio de encuentro	15
2.3. La Educación Matemática vale el esfuerzo que cuesta	17
2.4. El pensamiento geométrico	22
2.5. La Enseñanza de la Geometría en Educación Primaria.....	28
2.6. La formación geométrica en la Educación Secundaria Básica.....	31
2.7. La enseñanza de la Geometría en el Bachillerato.....	33
2.8. Saber docente: ¿decreto o experiencia?.....	38
2.9. Estrategias de enseñanza en el aula	44
2.9 a. La modelización.....	45
2.9 b. El error y la pregunta.....	47
2.10. La demostración en la enseñanza	49
3. Marco metodológico.....	56
3.1. El diseño	57
3.2. De la recolección de datos	61
3.3. De los datos documentados	62
3.4. De las encuestas.....	63
3.5. De las entrevistas	68
3.6. Selección de las instituciones y los docentes.....	72
3.7. Sobre el trabajo de campo	74
4. Análisis de datos	77
4.1. Análisis de los datos recabados por la encuesta	77
4.2. Análisis del material documental producido por los docentes de Bachillerato.....	87
4.3. Análisis de las entrevistas.....	89
4.3 a. Empleo de recursos en el aula.....	89
4.3 b. Sobre la visualización y la abstracción.....	93
4.3 c. Las actividades de aula	94
4.3 d. Los razonamientos de los estudiantes.....	98

4.3 e. Sobre la construcción de conceptos	101
4.3 f. La argumentación	102
4.3 g. La demostración	103
4.3 h. Sobre los tiempos.....	107
5. Conclusiones	112
5.1. Prácticas de representación material.....	112
5.2. Práctica de transformación	114
5.3. Práctica invisible.....	115
5.4. Consideraciones finales	116
6. Bibliografía	118
7. Anexos	123
Anexo 1: Glosario.....	123
Anexo 2: Síntesis de programas de Bachillerato que incluyen unidades de Geometría.....	125
Anexo 3: Encuesta a docentes	127
Anexo 4: Selección de docentes para las entrevistas.....	130
Anexo 5: Carta a directores	131
Anexo 6: Entrevista a docentes	132
Anexo 7: Entrevista a actor calificado.....	134

Índice de cuadros

Cuadro 1: Etapas del proceso de modelización Matemática.....	21
Cuadro 2: Niveles para el aprendizaje de la Geometría propuestos por Van Heile	25
Cuadro 3: Momentos del proceso de obtención y análisis de datos.....	60
Cuadro 4: Proceso de validación entre métodos	61
Cuadro 5: Etapas de la recolección de datos	62
Cuadro 6: Preguntas realizadas durante las encuestas en relación a las dimensiones y temáticas abordadas.....	67
Cuadro 7: Número de docentes que participaron de cada instancia del trabajo de campo	69
Cuadro 8: Preguntas realizadas durante las entrevistas en relación a las dimensiones y temáticas abordadas.....	71

Cuadro 9: Principales características de los liceos seleccionados para la realización del trabajo de campo	73
Cuadro 10: Cuestiones tenidas en cuenta por los docentes de Matemática al momento de trabajar un contenido geométrico	80
Cuadro 11: Razones expresadas por los docentes del por qué sí tener en cuenta recursos didácticos al trabajar contenidos geométricos en el aula	82

Índice de gráficos

Gráfico 1: Nivel educativo donde los docentes desempeñan su labor en relación al sexo	78
Gráfico 2: Carácter del cargo de los docentes encuestados en relación al nivel educativo en el que se desempeñan	78
Gráfico 3: Tipo de recursos didácticos utilizado en Geometría en Bachillerato.....	81
Gráfico 4: Empleo de recursos didácticos para la enseñanza de la Geometría	84

1. Introducción

Año tras año, los estudiantes de Matemática se enfrentan a cursos que implican cada vez mayor grado de abstracción conceptual. Se torna necesario que el alumno transite por estadios de desarrollo cognitivo que complejicen sus estructuras de pensamiento. Esta es una de las razones por la cual el rol asignado a las instituciones educativas, más precisamente a los docentes que forman parte de ellas, gira en torno a la creación de óptimas condiciones de estudio para que los alumnos puedan aprender los contenidos curriculares específicos a cada asignatura (Chevallard, 2000).

Aunque no imposible, difícilmente un alumno sienta la verdadera necesidad de estudiar Matemática por sí mismo. Sería factible preguntarse si el deseo por aprender Matemática se encuentra asociado a un fenómeno que tiene que ver con la didáctica de esta disciplina. Cabría pensar también si el hecho de que el alumno quiera aprender o se disponga a hacerlo, tiene relación alguna con las técnicas o las estrategias de enseñanza empleadas por los docentes.

Los contenidos curriculares, no se presentan ni se enseñan de igual manera en los distintos niveles educativos. Las estrategias empleadas por los docentes para presentar la Matemática a los alumnos, suelen ser de lo más variadas. El alumno puede sentirse o no atraído por esta disciplina y mostrar mayor disposición por su aprendizaje según las técnicas empleadas por el docente. Pero el saber no podrá siquiera ser propuesto si el profesor no logra generar en el estudiante una imperiosa necesidad por conocerlo. Quien enseña, tendría que provocar el deseo por saber, el deseo por aprender. Meirieu (1992) expone “*Lo que moviliza a un alumno, lo que inicia en su aprendizaje, es el deseo de saber y la voluntad de conocer*” (Meirieu, 1992; 100).

Comenio (1998) presenta la didáctica como *el arte de enseñar todo a todos*. Desde esta época se buscaba dar respuestas a métodos de enseñanza que atendieran a: ¿qué?, ¿para qué? y

¿cómo educar?, interrogantes que hasta el día de hoy son tenidas en cuenta actualizándose y reeditándose en relación con la sociedad y la época.

A diario, sería deseable que los docentes seleccionen estrategias de enseñanza en función de los conocimientos matemáticos que deseen abordar, de los alumnos con los que trabajan y del contexto en el cual desempeñan su labor. Las acciones llevadas a cabo para el trabajo en el aula son de lo más variadas: desde el cambio en la disposición de los bancos, el empleo de materiales concretos, aulas virtuales, software, entre otros. Cada estrategia seleccionada estimula una modalidad diferente de aprendizaje.

La Geometría se caracteriza por ser una disciplina que presenta una gran adaptabilidad ante el diseño de diversas estrategias de enseñanza, pudiendo atender con ellas objetivos de aprendizaje tales como el razonar, representar, abstraer, clasificar, interpretar, relacionar, visualizar, comparar, discutir ideas, conjeturar y probar hipótesis. El fomento por la adquisición de estas habilidades brinda acceso al desarrollo de estructuras lógicas de pensamiento.

Es posible que desde los primeros años de Educación formal y hasta que atraviesa por los primeros años de Educación Media, el alumno aprenda Geometría haciendo y participando activamente de sus aprendizajes. Se espera también que el docente provea de modelos matemáticos que reflejen situaciones reales, por lo que el aprendizaje, al menos en su inicio, giraría en torno a las percepciones y al descubrimiento.

El empleo de materiales o dispositivos didácticos (tradicionales, concretos, software educativos), permitiría la representación de algunos de los conceptos geométricos con los que el docente trabaja en el aula. De la interacción con los dispositivos en cuestión (al manipular, observar, dibujar) el alumno entraría en contacto con las formas, las figuras, por lo que podría ir construyendo los cimientos necesarios para afrontar futuros aprendizajes geométricos.

Si bien muchos contenidos geométricos se caracterizan por presentar un gran abanico de posibilidades para ser representados en el espacio físico o virtual, el pensar geoméricamente no puede quedar ligado a ello, ha de avanzarse a un modo de razonamiento que permita establecer representaciones mentales de los objetos en cuestión. *“Tomar en cuenta*

‘oficialmente’ el objeto de conocimiento por parte del alumno y el aprendizaje del alumno por parte del docente es un fenómeno social muy importante y una fase esencial del proceso didáctico...” (Brousseau, 2007; 98).

Al enseñar Geometría los docentes de Matemática tienen la libertad de optar desde una enseñanza geométrica intuitiva, experimental hasta una enseñanza geométrica lógica y racional. En todos los casos el objetivo tendría que ser el mismo: favorecer el desarrollo de estudiantes críticos y reflexivos, capaces de resolver racionalmente situaciones geométricas y de dar argumentos sólidos a sus modos de pensamiento.

Pero, ¿cómo lograrlo?

En esta investigación se pretende caracterizar el abordaje metodológico de las prácticas de enseñanza de la Geometría.

Para ello se busca dar respuesta a las siguientes preguntas: ¿cuáles son las valoraciones que los docentes de los cursos más avanzados de Educación Secundaria hacen acerca del empleo de recursos didácticos para la enseñanza de la Geometría? y ¿cuáles son los argumentos empleados al momento de decidir utilizar o no este tipo de dispositivos en sus prácticas de enseñanza?

Objetivos Específicos:

- Reconocer las principales estrategias empleadas por los docentes de Bachillerato para la enseñanza de la Geometría.
- Analizar el lugar que los docentes de Matemática le otorgan al empleo de recursos didácticos.
- Procurar un acercamiento a las formas de abordaje de las prácticas argumentativas de Geometría en Bachillerato
- Identificar las cuestiones tenidas en cuenta por los docentes de Bachillerato para la enseñanza de las demostraciones en Geometría.

Esta producción escrita, sin tener en cuenta la introducción, se encuentra organizada en cuatro capítulos.

El primero de ellos presenta el marco teórico, donde se estudian los procesos de enseñanza y de aprendizaje de la Matemática, particularmente de la Geometría, así como el pasaje por los diferentes niveles educativos. Se da cuenta además del saber docente y de las estrategias de enseñanza empleadas en el aula.

Seguidamente se presenta la metodología empleada, así como las técnicas de investigación utilizadas para recolectar información. Por tratarse de un estudio mixto se emplean técnicas de recolección de datos pertenecientes tanto al enfoque cualitativo –análisis documental, entrevistas a docentes y a un actor calificado- como al cuantitativo –encuesta a docentes-.

En tercer lugar se analizan e interpretan los datos recabados. En esta instancia se caracterizan las prácticas de enseñanza de la Geometría en Bachillerato y se estudian las metodologías mayormente implementadas para el tratamiento de las demostraciones geométricas.

Por último se plantean las conclusiones arribadas. En este capítulo se plasman los principales hallazgos resultantes del trabajo de investigación.

2. Marco Teórico

2.1. El aprendizaje y la enseñanza como transformaciones no lineales del saber

“El aprendizaje no sólo afecta a lo que sabemos, sino que puede transformar la manera en que entendemos la naturaleza del saber” (Bain, 2007; 53).

Cada persona es un ser único, con vivencias, experiencias sociales, culturales e históricas que le confieren características específicas. Por consiguiente, cada ser tiene sus propios modos de aprender que le permiten aproximarse al conocimiento y al saber.

Fernández (2008), establece una distinción importante entre conocimiento y saber. Un conocimiento es objetivable, puede ser adquirido a través del medio, por ejemplo mediante un libro o el empleo de una computadora, o puede ser alcanzado en forma indirecta e impersonal. Sin embargo, el saber solamente puede ser transmitido de persona a persona y por la experiencia. Mientras que el conocimiento puede ser enunciado a través de un concepto, el saber no puede ser enunciado y es alcanzado mediante la interacción con otras personas.

Por lo tanto, aprender consiste en apropiarse de un conocimiento e ir integrándolo con el saber.

En todo proceso de aprendizaje interviene la inteligencia (una estructura lógica), los sentidos (oído, vista, tacto, gusto, olfato) y el deseo de saber (conocimiento de la existencia de algo que se desconoce). Se podría plantear entonces que para que se dé una situación de aprendizaje sería necesario que quien enseña habilite espacios (situaciones o problemas) que provoquen interacción de estos tres factores: el alumno, el entorno y el deseo (Díaz Godino, Gómez, Gutiérrez y Rico, 1999).

Los procesos de producción de conocimiento en el ámbito educativo suponen la transformación y reorganización de los saberes de los estudiantes. Frente a todo proceso de aprendizaje el individuo tiende a la búsqueda del equilibrio, proceso alcanzado mediante la asimilación y la acomodación (Piaget, 1998). La persona aprende, en este caso Geometría, una vez que logra equilibrar, la interacción con un objeto geométrico y la adaptación e incorporación del nuevo elemento a sus esquemas.

Chevallard (2000) considera que es posible que el aprendizaje se lleve a cabo solamente mediante la participación de una dupla: un enseñante y un sujeto que aprende. La transmisión de un saber a ser enseñado de un sujeto al otro, abre espacio al proceso de aprendizaje.

Sin embargo, la posibilidad de comprender este saber depende, entre otras cosas, del desarrollo cognitivo del sujeto. La evolución de la estructuración de la inteligencia inicialmente se logra directamente de la experiencia. *“El logro de un período superior en la organización inteligente no se alcanza sino con un progresivo intercambio del sujeto con el medio, ... Intercambio que primeramente se da a través de las acciones materiales que luego van progresivamente interiorizándose y transformándose en operaciones”* (Fernández, 2008; 83).

El aprendizaje logrado a través de este intercambio es progresivo, por lo que no solamente se vale de la experiencia sino que se ve acompasado por una teoría que lo materializa. Una teoría es una producción construida en forma intencional, es un modelo de algo que se desea estudiar y que encierra aspectos de la realidad. Entre el saber emanado de la teoría y el saber práctico, existen personas (alumnos, docentes, autoridades, científicos), instituciones, intereses, ideologías, responsabilidades, exigencias, que determinan lo que ocurre en el aula. A pesar de influir una sobre la otra y de su intercambio constante, la teoría y la realidad se encuentran separadas.

Autores como Monereo, Castelló, Clariana, Palma y Pérez (2001), consideran que tanto las estrategias de enseñanza empleadas en el aula por el docente como los mecanismos de aprendizaje empleados por el alumno se encuentran fuertemente condicionados por el contexto educativo.

En síntesis, una persona adquiere el conocimiento a lo largo de toda su vida. No depende solamente de sus habilidades o de la capacidad de retención de información que posea o del contexto, sino que por la disposición que presente ante la apropiación de ese conocimiento: el interés por la lectura, por la búsqueda de información, por resolución de situaciones problemáticas, entre otros. Es a partir de los intereses, afectos, motivaciones, que es posible fomentar la actividad cognitiva de los alumnos.

El saber se logra a través de la interacción con otros. Por tal motivo, el contexto educativo es uno de los principales espacios donde se logran los aprendizajes. Es así que atender el qué y el cómo enseñar es fundamental para favorecer procesos de aprendizaje en el aula.

Cada concepto permitiría seleccionar una estrategia de abordaje y descartar otras en función de las habilidades y destrezas que el docente desee desarrollar en los estudiantes.

El tipo de problema seleccionado, las estrategias de resolución, la elaboración de conjeturas, la discusión de las mismas, las propiedades que de allí se desprenden y sus modalidades de validación, los emergentes y situaciones que se generan en el aula durante los procesos de aprendizaje, entre otros, son cuestiones que el docente ha de atender al armar un proyecto de enseñanza.

2.2. El contexto, espacio de encuentro

“Aprender es la característica humana más importante” (Longworth, 2003; 71).

En el aula intervienen factores perceptibles como lo son, por ejemplo, las características físicas del espacio de clase; e intervienen factores que no son de inmediato sobresalientes como, por ejemplo, las características culturales, los hábitos o la influencia de la familia. La conjunción de esos factores conforma parte esencial del contexto de aula, el cual, podría condicionar aquello que el estudiante hace y la visión que tiene de sí mismo y de su producción. Al momento de pensar la clase además de enfrentar factores que hacen a la tarea, sería esperable que el docente considerara la existencia de aspectos característicos de los estudiantes, tales como la autoestima, los intereses, el autoconcepto, determinantes para la construcción del saber. Aspectos cognitivos, afectivos, institucionales, sociales, entre otros, son cuestiones que parecerían atravesar tanto la construcción de los saberes de los estudiantes como la producción de las estrategias de enseñanza pensadas por los docentes. Por lo que a la hora de planificar el docente estaría atendiendo tanto aspectos que hacen a la tarea en sí como a sus propias concepciones sobre el cómo enseñar y el qué enseñar.

Frente a esta realidad habría de añadirse otro elemento necesario, aunque no suficiente: el conocimiento sobre la disciplina. Es importante que el docente emplee ese conocimiento *“para desarrollar técnicas que les permitan conocer a fondo principios fundamentales y conceptos organizativos que otros pueden utilizar para comenzar a construir su propia capacidad de comprensión y desarrollar sus capacidades” (Bain, 2007; 27).*

Para Díaz Godino et al (1999) la apertura que la persona que aprende despliega ante el aprendizaje estaría condicionada por dos aspectos: los conocimientos previos que estén presente respecto al saber que se desea transmitir y su nivel de desarrollo cognitivo. *“En general se acepta que el niño progresa siguiendo una secuencia regular de etapas, en una transición desde la dependencia inicial del mundo de lo real y concreto a la habilidad para*

captar el significado proposiciones abstractas presentadas simbólicamente” (Díaz Godino et al, 1999; 83).

Los docentes, expone Litwin (2008) seleccionan estrategias de enseñanza que derivan de diferentes motivos y razones; pensando en: los procesos de construcción de conocimientos, en el contexto, en los intereses de los estudiantes, en los contenidos a abordar, entre otras. Sin embargo, expresa esta misma autora, rara vez una misma estrategia podría adaptarse a contextos divergentes, generando los mismos resultados.

La escuela trasmite valores y saberes culturalmente determinados en un espacio y en un tiempo. Los adultos que forman parte de este universo seleccionan aquellas estrategias de enseñanza que, de un modo u otro, entienden más adecuadas para que sus alumnos desarrollen los procesos de aprendizaje. Los estudiantes aprenden desde estas prácticas, pero también aprenden de la experiencia.

En las aulas, es posible encontrar estudiantes con distintos intereses, niveles sociales, culturales, valores. Las referencias familiares, no siempre presentes, hacen que sean los propios estudiantes quienes seleccionen sus espacios de encuentro. Centros educativos, clubes deportivos, bibliotecas, salones de video juegos, las calles; son algunos de los escenarios donde son contenidos los estudiantes y de los cuales aprenden. Estas experiencias de vida se reflejan en las aulas.

Podría plantearse que existe un espacio de aprendizaje, no institucionalizado, donde los estudiantes construyen sus conocimientos: su entorno. La televisión, el internet, los medios de comunicación masiva, las experiencias de vida, todo forma parte de los aprendizajes, cada vez más enriquecidos, cada vez más diseminados

Muchas veces, el tratamiento curricular que se le da a un determinado tema dentro de las instituciones educativas, hace que se construya una visión un tanto particular del mundo. Aprender un contenido curricular desde diferentes perspectivas, ayuda a enriquecer el modo de actuar y de pensar de los estudiantes.

Está en la labor docente generar verdaderos desafíos cognitivos, lo que implica “*pensar problemas genuinos que no tienen soluciones algorítmicas sino procesos de descubrimiento que se plasman en la reflexión personal y su creatividad*” (Litwin, 2008; 119).

En síntesis, existen cuestiones que hacen a la tarea docente como el conocimiento sobre la disciplina, la selección de estrategias de enseñanza, entre otros. Pero también existen factores que hacen al estudiante, que lo contextualizan y que el docente no puede desestimar como los elementos culturales, sociales, afectivos, cognitivos.

La actividad docente se despliega en el interjuego de cuestiones que trascienden las instituciones educativas, el espacio físico, el cuerpo directivo, la comunidad, el currículum y los medios que vehiculizan la comunicación.

2.3. La Educación Matemática vale el esfuerzo que cuesta

“Enseñar es, ... aprender. Aprender antes, aprender durante, aprender después y aprender con el otro” (Litwin, en Camilloni et al, 1996; 113).

Cada vez que alguien estudia Matemática, asevera Chevallard (2000), ya sea en forma individual o con ayuda de otros, se produce un proceso didáctico, un proceso de enseñanza. Sin embargo “*el aprendizaje*”, sostiene este autor, “*no se produce sólo cuando hay enseñanza, ni se produce únicamente durante la enseñanza*” (Chevallard, 2000; 58). Las instituciones educativas, no son el único ámbito donde se aprende o se estudia Matemática y la enseñanza no es el único medio para lograrlo.

“... el niño llega a la escuela con un cierto conocimiento, con medios, hábitos gracias a los cuales va a tratar la información que recibirá y tomar decisiones cuando tenga que elegir...

Los aportes exteriores a la escuela (TV, amigos, familia), continúan produciéndose a lo largo de toda la escolaridad...” (Douady, 1984; 3).

La Matemática forma parte de la cultura. Permite comunicar, significar, interpretar, predecir, organizar. No es simplemente una construcción formal que se funda lejos de cada persona sino que aparece bajo diversas formas y expresiones del pensamiento. La Matemática se caracteriza por presentar un doble propósito. Por un lado, constituye una herramienta imprescindible para el desarrollo científico, el comercio, la economía, la industria y, por el otro, favorece el desarrollo de capacidades y habilidades que permiten interactuar, interpretar y comprender la realidad.

Douady (1984) establece que todo concepto matemático presenta una dualidad en su carácter de instrumento – objeto. Esta autora, entiende por objeto a aquel concepto que forma parte de una construcción cultural, reconocido socialmente y que va más allá del conocimiento considerado inteligente en un momento dado. Un concepto matemático toma carácter de instrumento si este presenta un funcionamiento científico, estableciendo una red de relaciones entre los conceptos implicados en la resolución de un determinado problema.

“Existe en la actualidad una fuerte corriente en educación matemática que sostiene con fuerza la necesidad de que el aprendizaje de las matemáticas no se realice explorando las construcciones matemáticas en sí mismas, en las diferentes formas en que han cristalizado a lo largo de los siglos, sino en continuo contacto con las situaciones del mundo real que les dieron y les siguen dando su motivación y vitalidad” (Gíl y de Guzmán, 1993; 116).

Una limitación de la educación de la Matemática a una exposición puramente teórica, sin atender situaciones que hagan referencia a problemas de la realidad o de los orígenes de la Matemática, podría perder el atractivo que las aplicaciones y modelizaciones brindan a su enseñanza.

En la actualidad los estudiantes se encuentran atraídos por un sinnúmero de situaciones (televisión, historietas, video juegos, viñetas, entre otros) que es posible aprovechar como recursos de enseñanza de la Matemática, en particular de la Geometría. El gusto por el descubrimiento en Matemática, aseveran Chevallard, Bosch y Gascón (1997), es posible.

Si bien la Matemática es una producción social y cultural, la actividad Matemática que le concierne al docente es la producida en el aula. Se hace necesario que a la hora de pensar

tanto los procesos de enseñanza como la selección de estrategias a implementar para llevar a cabo su labor, los docentes atiendan no solo cuestiones curriculares, sino también institucionales.

La selección de propuestas que el estudiante ha de resolver implicaría para el docente un previo abordaje teórico de los contenidos a trabajar en el aula, reflexionar sobre sus prácticas, seleccionar sus estrategias de enseñanza, tomar y fundamentar sus decisiones. Para ello quien enseña ha de situar su cabeza en el aula, organizar un proyecto de enseñanza atendiendo como expone Brousseau (2007) qué problemas matemáticos son más favorables o dan lugar a la construcción de cada grupo de contenidos que se requiere abordar. Por su parte, el alumno asumiría la responsabilidad frente a la tarea, interesarse, tomar decisiones sobre las formas de abordaje que considere más pertinente y activar conocimientos previamente elaborados.

Desde una perspectiva didáctica de la Matemática, ante todo proyecto de enseñanza, sería prudente que el docente además de atender el cuerpo teórico que desea trabajar (Geometría métrica, divisibilidad, ecuaciones) considerara las herramientas con las que cuentan los estudiantes (propiedades, definiciones), así como también sus experiencias de producción de conocimiento, el nivel educativo en el que se desarrolla su labor. La organización entre lo que el alumno sabe con el qué se quiere enseñar facilitaría al docente el análisis del cómo enseñar y por tanto la toma de decisiones. *“El análisis de las condiciones para fundamentar al nivel de los conocimientos de los alumnos las propiedades que se estudiarán vinculadas a cierta temática requiere a veces de una reconstrucción por parte del profesor que lo sitúa en un verdadero trabajo de producción matemática... en muchas ocasiones deberá inventar demostraciones nuevas para propiedades muy familiares para él pero que se demuestran normalmente apelando a conocimientos que sus alumnos no tienen en el momento en que deben estudiar dichas propiedades”* (Sadovsky, 2005; 42).

Es así que la actitud que toma el docente en el aula establece intenciones y relaciones que pueden habilitar espacios para la construcción de los saberes o pueden obstaculizarlos. Esto se podría desprender básicamente de las pautas de trabajo matemático que hayan sido preestablecidas explícita o implícitamente. Si, por ejemplo, durante el trabajo en pequeños grupos el docente expresa la necesidad de acordar una respuesta luego del consenso entre todos los integrantes, se transmite de manera implícita que es necesario pensar en una única

respuesta a modo de no plantear afirmaciones que pueden resultar contradictorias. El alumno reconoce las intenciones ocultas en estos discursos que dan soporte a sus ideas y formas de pensamiento, que son modificadas o no y dan sustento a nuevas relaciones entre sus conocimientos (Sadovsky, 2005). El estudiante puede haber resuelto la propuesta sin haber tenido en cuenta una visión muy general de ella por lo que la actitud que tome el docente en esta fase es fundamental. Invitar a los estudiantes a reflexionar sobre ello, modificar datos, analizar otras perspectivas ayuda a reflexionar sobre el trabajo matemático. De la interacción entre diferentes posturas y explicaciones se produce una articulación entre viejos y nuevos conocimientos, se construyen los conocimientos.

Las instituciones educativas como espacios de construcción de conocimientos y como forma de control de los aprendizajes colocan al docente en una posición de poder. “*El objeto de enseñanza*”, expresa Duoady (1984), “*es determinado por la institución, no por el maestro. Este sólo tiene la responsabilidad de los medios que utilizará para lograr su objetivo*” (Duoady, 1984; 3). Está en el docente el desafiar al alumno atrapando su interés y problematizando situaciones que lo inviten a pensar, explorar, discutir, argumentar,... generando nuevas construcciones del saber.

Autores como Chevallard (2000) consideran que para que el aula sea un ámbito de construcción de conocimientos, es necesario pensar la Matemática como un proceso de modelización: considerar una problemática, en general compleja por representar un recorte de la realidad, en la cual intervienen diversas variables; seleccionar aquellas variables que desean estudiarse y basándose en una teoría matemática transformar estas relaciones en un sistema matemático que se ha de resolver.

Los objetos matemáticos no pertenecen al espacio físico real, sino que constituyen una forma de representar conceptos matemático puramente teóricos. Permitir que el alumno reflexione sobre situaciones que han sido modelizadas puede dar lugar a la identificación de relaciones y construcción de contenidos teóricos y por tanto la producción de conocimientos. “*Un aspecto esencial de la actividad matemática consiste en construir un modelo (matemático) de la realidad que queremos estudiar, trabajar con dicho modelo e interpretar los resultados*

obtenidos en este trabajo para contestar a las cuestiones planteadas inicialmente. Gran parte de la actividad matemática puede identificarse, por lo tanto, con una actividad de modelización matemática” (Chevallard, 2000; 51).

El siguiente cuadro da cuenta de las competencias matemáticas empleadas y de las etapas que atraviesan las personas al enfrentarse a una actividad de modelización Matemática.

Cuadro 1: Etapas del proceso de modelización Matemática



Fuente: *La Evaluación de la Competencia Matemática. PISA 2012*

El abordaje en el aula de actividades de modelización conduce a que el estudiante emplee técnicas, procedimientos, representaciones, elaboración de conjeturas, argumentaciones, demostraciones, específicos a cada caso.

Es así que una propuesta representante de un objeto matemático, abarca una construcción teórica y encierra en sí misma una modalidad de resolución. Cada actividad propuesta podría despertar en los estudiantes actitudes y modos de abordaje diferentes.

En síntesis, pensar en el aula como un ámbito de actividad Matemática implica situar al alumno ante escenarios que lo inviten a formular conjeturas, buscar formas de validarlas, construir formas de representación que le permitan pensar acerca del objeto matemático con el

que se está trabajando, argumentar razonamientos, tomar decisiones, seleccionar herramientas, extraer conclusiones, entre otros.

Incluir un proyecto de enseñanza que atienda el qué y cómo enseñar, qué contenidos trabajar y cómo abordarlos, sería fundamental, si se espera que el alumno logre una mirada más global ante una misma problemática, admitiendo que frente a un mismo problema matemático existen diversas modalidades de abordaje.

Pensar la clase desde distintas metodologías de enseñanza que atiendan a los contenidos matemáticos a abordar: seleccionar los problemas a emplear, los contenidos previamente validados por los estudiantes, las técnicas a usar, los modos de fundamentación, favorecería la construcción de este proyecto.

2.4. El pensamiento geométrico

“... la geometría es el arte de razonar bien sobre figuras mal hechas” (Poincaré, 1913; en Micelli y Crespo, 2012; 1).

El pensamiento geométrico se remonta casi que a principios de la historia, cuando los egipcios restablecían los límites de los terrenos, luego de la creciente del río Nilo y calculaban los impuestos en forma proporcional a la producción y la superficie de tierra que le correspondiera. Es así que la Geometría surge como una ciencia empírica, que inicialmente al igual que otras disciplinas como la Física o la Química, busca una aproximación cada vez más exacta de la realidad.

Freudenthal (1993) considera que en el nivel escolar se presenta una forma similar de comprender la Geometría, indicando que la *“Geometría es... [la] comprensión del espacio en*

que el niño vive, respira, y se mueve, del espacio en que el niño ha de aprender a conocer, explorar y conquistar, ...” (Ferudental, 1993, en Villarroya, 1994; 96).

Desde esta perspectiva, el conocimiento geométrico en el nivel escolar estaría ligado a la comprensión del espacio sensible y por tanto permite al sujeto interactuar con el entorno que lo rodea.

El pensamiento geométrico permite estimular la capacidad de explorar, vivenciar, entrar en contacto y pensar racionalmente el espacio físico en el que la persona se encuentra inmersa (Martínez Recio y Rivaya, 1998). De hecho, la Geometría adopta en el mundo una amplia variedad de formas, producto de la actividad del hombre. Estas formas en las cuales se basa la Geometría controla (a través de, por ejemplo, mapas, cálculo de distancias o astronómicos) el espacio físico en el que las personas se desenvuelven y actúan.

Enseñar a pensar geoméricamente a edades tempranas favorece el desarrollo de nociones básicas de organización del espacio. Piaget (1998) sostiene que es posible avanzar a estadios superiores de pensamiento, construyendo nociones geométricas básicas que servirán de cimiento para el aprendizaje de nuevos contenidos y relaciones.

La comprensión de las formas y relaciones de los objetos provenientes del entorno real permite el desarrollo de las operaciones cognitivas necesarias para el reconocimiento de formas y propiedades geométricas. Tal es así, aseveran Alsina, Burgués y Fortuny (1997), que en el aprendizaje geométrico han de distinguirse dos momentos, dos fases que atraviesa el desarrollo del pensamiento:

- el de *“naturaleza visual”* que se realiza de forma directa, es creativo, originario de la intuición y cargado de subjetividad.
- el de *“naturaleza verbal”*, aprendizaje que se lleva a cabo de forma reflexiva y analítica, producto del pensamiento lógico y de carácter objetivo.

La etapa de naturaleza visual, desempeña un papel fundamental en el reconocimiento de las formas. A través de ella es posible el captar y construir una primera imagen que al irse

integrando se van transformando en estructuras más complejas. Esta etapa es el primer escalón en la construcción del conocimiento del espacio real.

La visualización corresponde al saber ver. Consiste en observar y retener imágenes que permitan reconocer las mismas características y propiedades de entre una variedad de objetos. Sin embargo, para que el conocimiento obtenido sea efectivamente correcto, para que pueda ser expresado y comunicado, necesita ser analizado desde el empleo de leyes lógicas de pensamiento (Alsina et al, 1997).

La visualización requiere del desarrollo de habilidades como el saber ver y el saber interpretar, que necesitan ser aprendidas. El aprendizaje del conocimiento geométrico abre espacio a estas habilidades, ya que en él se requiere que el estudiante identifique y reconozca figuras, propiedades, relaciones.

La recolección de información del entorno a través de diferentes sentidos (visual, olfativo, táctil, auditivo) brinda los insumos necesarios para la construcción de los conceptos matemáticos. Pero para que una idea tenga sentido, el individuo debe ser capaz de desarrollar una memoria visual que le permita recordar sus características específicas. Debe reflejar una imagen abstracta de ella mostrando sus particularidades, siendo reconocida entre una diversidad de objetos geométricos similares.

La etapa de naturaleza verbal implica la capacidad de expresar una idea y de emplear apropiadamente el lenguaje geométrico para comunicarla. A través de esta etapa es posible el desarrollo de habilidades básicas de pensamiento, fomentando la capacidad de establecer una idea, explicar razones y dar argumentos que permitan validar o no las conjeturas efectuadas. Al igual que el lenguaje geométrico, la verbalización ha de ser aprendida.

Se podría plantear entonces que el pensamiento geométrico involucra un conocimiento matemático más avanzado, donde el sujeto ha de poder interactuar con el objeto geométrico, objetos (puntos, rectas, planos, polígonos, poliedros) que *“no pertenecen a un espacio físico real, sino a un espacio teórico, conceptualizado”* (Itzcovich, 2005; 10).

En este orden de cosas, el pensar geoméricamente implica el razonar sobre un objeto producto de la construcción mental del hombre, por lo que el estudiante ha de incorporar procesos de pensamiento tales como el representar, visualizar, clasificar, abstraer, conjeturar, analizar, generalizar, entre otros (Azcárate; 2003).

Por su parte Van Hiele (en Fouz, 2005) proponen cinco niveles transitados por los estudiantes durante su aprendizaje geométrico.

Cuadro 2: Niveles para el aprendizaje de la Geometría propuestos por Van Heile

	Elementos Explícitos	Elementos Implícitos
NIVEL 0: Visualización o reconocimiento	Figuras y objetos	Partes y propiedades de las figuras y objetos
NIVEL 1: Análisis	Partes y propiedades de las figuras y objetos	Implicaciones entre propiedades de figuras y objetos
NIVEL 2: Ordenación o clasificación	Implicaciones entre propiedades de figuras y objetos	Deducción formal de teoremas
NIVEL 3: Deducción formal	Deducción formal de teoremas	Relación entre los teoremas (sistemas axiomáticos)
NIVEL 4: Rigor	Relación entre los teoremas (sistemas axiomáticos)	Tratamiento de conceptos geométricos de manera abstracta.

Fuente: Elaboración personal en base a modelo de Van Heile (apud Fouz y de Donosti, 2005; 71).

Para estos autores el pasaje de un nivel a otro dependería de la selección de los materiales y del diseño y la organización de las actividades propuestas por el docente ya sea de presentación, profundización o sistematización de un tema.

El pasaje de un nivel de razonamiento al siguiente se produce en forma ordenada y progresiva. Por lo que una persona que se desempeñe adecuadamente en un nivel, que adquiera un correcto empleo del lenguaje y el dominio de los conocimientos específicos a cada etapa, podrá avanzar en los siguientes niveles.

Por su parte para Meirieu (1992), es posible observar en el sujeto una verdadera comprensión de los temas cuando existe en él un pasaje de lo concreto a lo abstracto. Si bien muchas veces se necesita del monitoreo de aquellos más expertos, es posible que el alumno partiendo de una situación específica, desarrolle junto a sus representaciones ya existentes, las herramientas necesarias que le permitan despegar del espacio concreto (materiales didácticos, dibujos, entre otros) y reconocer un objeto en forma aislada, logrando su construcción mental junto a sus características y propiedades.

Tal es así que una de las responsabilidades más complejas que encierra la labor docente para enseñar la Geometría es la organización de los contenidos curriculares atendiendo cuestiones tales como establecer la secuencia de trabajo, jerarquizar conceptos de acuerdo con los tiempos que se dispongan, seleccionar el tipo de actividades y propuestas de aula con la que piensa llevar a cabo los procesos de enseñanza, entre otros.

Un docente que atendiera el conocimiento geométrico de los estudiantes, las formas en que ellos viven y construyen los objetos geométricos y los modos de razonar sobre ellos parecería estar contribuyendo a lo que en este trabajo se ha dado en llamar pensar geoméricamente. De este modo la práctica de la Geometría acerca al estudiante a vivir la cultura de una forma diferente, ya que la propia experiencia del pensar geoméricamente presenta características de dominio diferente a otras áreas (Itzcovich, 2005).

En su trabajo diario, el docente se enfrenta a una compleja situación al tratar de enseñar objetos que no pertenecen al mundo real, sino que a un espacio construido desde la teoría. Los objetos de enseñanza son representaciones teóricas sobre los cuales el alumno interpreta, analiza y establece relaciones, características y propiedades. Se hacen explícitas las condiciones que encierran el dominio de validez de los contenidos geométricos. Por ejemplo, criterios de clasificación y definición de cuadriláteros, las propiedades y relaciones que ellos cumplen, terminología y simbología a utilizar, entre otras.

En reiteradas oportunidades, las representaciones sirven de soporte para el análisis de características y propiedades de los objetos con los cuales se trabaja (Itzcovich, 2005).

Tal es así que las figuras de análisis constituyen una potente herramienta para que el alumno pueda pensar sobre el objeto, analice, discuta, establezca conjeturas.

Para Alsina et al (1997) la interacción entre la percepción visual y la representación de objetos a partir de esquemas o dibujos, permite razonar sobre el objeto geométrico.

De lo antes expuesto podría establecerse que el desarrollo del pensamiento geométrico involucra dos pilares que vertebran el conocimiento matemático: la heurística (la atención a los procesos de pensamiento) y los contenidos específicos disciplinares. Al respecto Edelstein (1996) establece que en el enseñar es ineludible atender tanto la metodología que será empleada para el tratamiento de un contenido como la problemática de quienes aprenden. De este modo, ante todo proceso de enseñanza *“La construcción metodológica... se conforma a partir de la estructura conceptual... de la disciplina y la estructura cognitiva de los sujetos en situación de apropiarse de ella”* (Edelstein, 1996, en Camilloni et al, 1996; 81:82).

En síntesis, a pesar de que el origen de la Geometría se remonta al espacio experimental y empírico, esta es vista como un producto hecho para la escuela y no como algo presente en todos los aspectos de la vida.

Enseñar un concepto geométrico mediante situaciones que le permitan al alumno explorar, indagar, probar, identificar propiedades, hacer explícitos sus procesos de razonamiento durante la obtención de las características de los objetos geométricos más allá de la modalidad seleccionada para representar dicho objeto (dibujo, material concreto, software, entre otras), favorecería en el estudiante el desarrollo del pensamiento geométrico.

El fomento del estudio de una Geometría que atravesase fases exploratorias juega un papel importante en la construcción de conceptos. El alumno conoce propiedades y enunciados que le sirven como base para iniciar el abordaje del problema, pero desconoce cuál o cuáles son los medios y las herramientas más adecuadas para resolverlo. Desde este escenario se estimula la necesidad de observar y efectuar un análisis profundo de los planteos propuestos,

generar conjeturas y estudiar su validez, establecer hipótesis, contrastarlas y probarlas, construir enunciados mediante el desarrollo de razonamientos y el empleo de argumentos sólidos.

2.5. La Enseñanza de la Geometría en Educación Primaria

“Hay muchos modos de vivir la Geometría: desde el ángulo profesional más elevado, hasta el descubrimiento más intuitivo de un niño” (Alsina et al, 1997; 14).

Durante los primeros años de la educación formal, sería esperable que la enseñanza Matemática se encontrara presente bajo diversas formas de situaciones problematizadoras que permitan la construcción de los contenidos. Sería esperable que se establecieran relaciones de conceptos y patrones mediante vinculaciones de las experiencias personales de los estudiantes con los conceptos a ser aprehendidos. *“Problematizar un contenido es más que resolver problemas; implica una actitud cuestionadora permanente hacia el trabajo matemático” (Fripp, 2011; 17).*

Estas cuestiones son atendidas en el programa del Consejo de Educación Inicial y Primaria (CEIP), el cual *“propone una Geometría exploratoria, dinámica y problematizadora.”* (CEIP; 2008; 67).

La enseñanza de la Geometría en la Educación Primaria se encuentra ligada al fortalecimiento y desarrollo de habilidades cognitivas, entendiendo que este es un proceso paulatino, que ocurre con cierta continuidad. Por tal motivo, la currícula escolar plantea una enseñanza basada en la resolución de situaciones problemas y una enseñanza de carácter exploratorio que acompañe este proceso y fortalezca el desarrollo de competencias y habilidades necesarias para la vida.

En el programa propuesto por el CEIP (2008), se establece que el conocimiento matemático, y por tanto el geométrico, como todo conocimiento, es una elaboración cultural que ha adoptado tradicionalmente un carácter científico. De este modo, *“...como ciencia formal, utiliza metodologías hipotético - deductivas y un lenguaje universal para construir las representaciones mentales y organizarlas como sistema axiomático. Este le permite modelizar situaciones a partir del análisis de la realidad, constituyéndose en herramienta valiosa también para otros campos del conocimiento”* (CEIP, 2008; 60).

A medida que crece la capacidad de abstracción, se fortalecen otras funciones tanto cognitivas como sociales necesarias para representar y comunicar ideas, para socializar e interactuar. *“Así pues, a través de la interacción con su entorno físico y social, el niño construye progresivamente sus conocimientos de forma rigurosa y sistemática, consiguiendo desvincularse cada vez más de las experiencias más inmediatas y concretas”* (Monereo et al, 2001; 133).

El pasaje por la Educación Primaria no constituye un puente articulador entre Educación Inicial y Educación Secundaria, sino que constituye una fase donde el niño construye su capacidad de autonomía. Es en esta etapa donde el estudiante comienza el desarrollo del pensamiento crítico, reflexivo que será sustento del conocimiento científico.

Se considera valioso en esta etapa del aprendizaje (Programa de Educación Inicial y Primaria, 2008):

- desarrollar el pensamiento geométrico intuitivo por medio de la implementación de actividades que involucren tanto el plegado, encastrado, recorte, entre otras como el enunciado de justificaciones de las soluciones obtenidas.
- propiciar una enseñanza de la Geometría basada en un enfoque empírico, exploratorio, dinámico y problematizador.
- proponer situaciones que despierten la necesidad de establecer explicaciones que argumenten las conclusiones alcanzadas a partir del reconocimiento de propiedades de las figuras.

Tanto la intuición como la argumentación, son habilidades que comienzan a adquirir mayor relevancia en esta etapa del desarrollo del niño y continúan siendo estimuladas y explotadas a lo largo de toda la Educación formal.

La mayoría de los contenidos geométricos propuestos en los programas vigentes de la Educación primaria en el Uruguay se muestran en forma secuencial y escalonada. Esto podría ser una de las causas por las cuales las metodologías empleadas para la enseñanza de dichos conceptos se presenten bajo formas de bloques de conocimientos.

En síntesis, los contenidos curriculares propuestos en los programas de Geometría de Educación Primaria centran su enseñanza en las *“figuras, sus propiedades y relaciones como el objeto específico superando tanto los enfoques nominalistas como los aritmetizados”* (CEIP, 2008; 67).

Se presenta un tratamiento de los contenidos en forma secuencial, y se espera que el alumno explore, experimente y logre despegar de un trabajo puramente visual y perceptivo. Mediante la resolución de situaciones problemas, actividades lúdicas, analizando diferentes dibujos, entre otros, se espera que el alumno justifique soluciones obtenidas y explique razonamientos seguidos, adquiriendo cada vez mayor nivel de generalidad.

Es así que la currícula escolar presenta una enseñanza de la Geometría en función de los contenidos que han de ser abordados de acuerdo con las habilidades que se deseen desarrollar y las edades de los estudiantes.

Se busca atender en todo momento una linealidad de los conceptos abordados procurando no perder de vista la secuencia que ha de seguirse para que el estudiante vaya paulatinamente explorando la Geometría. Se espera que en esta secuencia el estudiante desarrolle habilidades de: observar, abstraer, comunicar, entre otras. Por tal motivo, introducirse a problemas geométricos por medio de un campo exploratorio es una herramienta empleada sobre todo en los primeros niveles de la educación formal.

2.6. La formación geométrica en la Educación Secundaria Básica

“La reflexión sobre el trabajo matemático “produce” más matemática...” (Sadovsky; 2005; 37).

A diferencia de la Educación Primaria que destaca la observación, la comparación y la representación de datos como estrategia de enseñanza de la Matemática, la Educación Secundaria obligatoria o Ciclo Básico centra sus procesos de enseñanza de la Matemática en el aprendizaje de tres tipos de procedimientos: comprensión y empleo del lenguaje matemático, algorítmico y heurístico.

En los programas vigentes del Ciclo Básico (CB) del Consejo de Educación Secundaria (CES) aparecen las siguientes expresiones:

- *“se considera preferible una introducción gradual siempre motivada por la necesidad de una conceptualización y de la expresión simbólica”* (Programa de Matemática, 1er año CB, 2006; 1).
- *“Si bien la actividad de resolución de problemas es ineludible en la formación matemática de los alumnos, consideramos que debe ser complementada con otras que también generan aprendizajes y que permiten un real afianzamiento y profundización de los conceptos matemáticos”* (Programa de Matemática, 2do año CB, 2006; 2).
- *“Esta etapa experimental, de descubrimiento por parte del alumno, será seguida en cada caso por una etapa de profundización racional que el docente adecuará a las características de la realidad de su curso... Promover actividades sencillas de investigación...”* (Programa de Matemática, 2do año CB, 2006; 4).

De las tres citas mencionadas anteriormente, es en el desarrollo de los procesos heurísticos *“donde se plantean los procedimientos más interdisciplinarios, como comprobar y refutar hipótesis, generalizar relaciones o propiedades o buscar regularidades y pautas”* (Monereo, et al, 2001; 141).

Parecería entonces que la Educación Matemática durante los primeros años de la Enseñanza Secundaria básicamente se centra en preparar al alumno para enfrentarse posteriormente a métodos deductivos de razonamiento. Sin embargo, el estudiante no siempre cuenta con la madurez suficiente como para alcanzar el nivel de razonamiento necesario para la construcción de procedimientos lógicos deductivos (de la Torre, 2003).

De este modo, en los primeros años de Educación Secundaria se tiende a desarrollar una enseñanza basada en el empirismo experimental, una enseñanza que encuentra sustento en el conocimiento validado por la práctica y la percepción. Se trata de convencer al alumno de la veracidad de una propiedad, de un teorema, por diferentes caminos, pero sin plasmar la necesidad de un examen crítico sobre el tema que se desea estudiar. *“El hecho de que se aplique el método empírico demuestra que se tiene, por así decirlo, mala conciencia y que se experimenta la necesidad de convencer a los alumnos de la validez de los teoremas por una vía distinta de la deductiva...”* (Beth et al, 1963; 40).

El docente tiende a maquillar el carácter abstracto de la Matemática. Si bien no sería favorable la presentación de una Matemática rígida y formal en este nivel educativo, sería favorable enseñar al estudiante una Matemática con el suficiente nivel de formalidad y carácter de abstracción acorde a sus estructuras de pensamiento.

Chevallard et al (1997) establece que desatender a los procesos de aprendizaje de esta disciplina, puede hacer de la enseñanza de la Matemática una cadena de fórmulas y procedimientos sin aparente posibilidad de aplicación en otro ámbito que no sea el áulico.

En síntesis, a diferencia de la Educación geométrica en la Escuela Primaria, la Educación geométrica en Secundaria plantea enfoques diferentes. En esta se apunta a que el estudiante maneje un lenguaje matemático, desarrolle procesos de pensamiento más elaborados y descontextualizados y desarrolle destrezas algebraicas y geométricas.

Se espera de este modo que el estudiante haya adquirido en cursos anteriores una base sólida de conocimientos que le permitan avanzar en sus estructuras de pensamiento cada vez menos concretas, para así lograr un mayor nivel de abstracción.

2.7. La enseñanza de la Geometría en el Bachillerato

“... ‘aprender’ tiene poco sentido si no ejerce una influencia permanente en la forma en que posteriormente piensa, actúa o siente el estudiante” (Bain, 2007; 40).

Una de las características en la enseñanza de la Geometría, es la de presentar un alto valor formativo, lo cual acerca a los estudiantes a formas diferentes de pensar y de actuar sobre un objeto matemático.

Tal es así que al realizar un análisis de los programas de los diferentes niveles de la Educación Formal propuesta por el sistema educativo uruguayo, es posible observar una notoria preocupación en cuanto a los procesos cognitivos implicados en el pensamiento geométrico de los estudiantes, tales como clasificar, visualizar, representar, generalizar, abstraer, entre otros.

En los cursos de Matemática de los diferentes niveles se espera que el alumno profundice en los distintos conceptos abordados, haciendo énfasis en el desarrollo de habilidades específicas a cada caso. Es así que, como se planteó anteriormente, mientras que el programa escolar propone *“... incluir entre otras: actividades de plegado, recortado, superposición, encastrado, discusión en torno a figuras de análisis... se propone una Geometría exploratoria, dinámica y problematizadora”* (Programa escolar, 2008; 66), en los cursos de los primeros años de Educación Secundaria es posible observar expresiones como *“A una visión intuitiva de la geometría realizada en el curso anterior, en la que se observaron propiedades de figuras y algunas relaciones básicas, seguirá en este curso un tratamiento experimental de las mismas pero con fundamentación racional mediante conjeturas y argumentaciones para las cuales el profesor fijará su alcance”* (Programa de Matemática, 2do año de Ciclo Básico, 2006; 1).

A medida que el estudiante avanza a niveles superiores de educación se busca una mayor implicancia en cuanto a sus aprendizajes así como también lograr enriquecer sus procesos de pensamiento. En los programas más avanzados de los diferentes cursos de Bachillerato se encuentran enunciados como *“El objetivo de esta etapa es enfrentar al alumno con un método*

de trabajo más riguroso que el realizado en cursos anteriores, fomentando una participación activa en la resolución de problemas donde se estimulará la experimentación, elaboración de conjeturas y demostración de las mismas” (Programas de Matemática, 3er año de Bachillerato, 2006; 1).

Se podría plantear entonces que existen claras diferencias entre los objetivos de enseñanza propuestos en los diferentes niveles educativos. Sin embargo, del análisis de los planes y programas puede observarse que existen puntos de encuentro. En todos los casos se hace necesario que el estudiante explore, visualice, manipule mentalmente y extraiga conclusiones de conceptos de los que no tiene total conocimiento, para lo que deberá avanzar en sus esquemas de pensamiento.

El nivel de complejidad de los contenidos a trabajar no es el mismo por lo que las exigencias y el manejo conceptual a los que hará frente el estudiante aumentan notoriamente. En esta etapa se espera que el alumno haga frente a una Geometría más rigurosa. La intuición y la experimentación comienzan a ser aceptadas solamente a modo de inicio en la resolución de una actividad, con el fin de promover procesos más rigurosos de producción de conocimientos. El estudiante ha de poder despegar de lo empírico y experimental por lo que la actitud que presente en el aula se torna fundamental ante sus aprendizajes.

Calvo Pesce (2001), considera que *“no existen elementos que distingan los procesos involucrados cuando una persona está haciendo Matemática, en procesos avanzados y procesos elementales. Abstracción, análisis, categorización, conjeturación, definición, formalización, generalización, demostración, son procesos que no están confinados a la etapa Avanzada, lo que varía de una a otra etapa es el peso y la frecuencia de su uso”* (Calvo Pesce, 2001; 2).

Por su parte Azcárate (2003) destaca la importancia de centrar los procesos de enseñanza en dos aspectos característicos y complementarios del pensamiento matemático avanzados: los proceso de abstracción y de representación.

En cuanto a que la abstracción implica establecer una construcción mental del objeto a partir de una determinada estructura Matemática asociando al objeto propiedades y relaciones,

Alsina et al (1997) aseveran que el éxito en Matemática puede asociarse a la riqueza que el estudiante establezca acerca de las representaciones mentales de un concepto matemático.

Pero a pesar de que estos aspectos favorecen la evolución en los procesos de pensamiento, no se dan en forma espontánea, sino que habrían de ser trabajados desde edades tempranas, proponiendo actividades que amplíen el bagaje de conocimientos matemáticos de los estudiantes.

Calvo Pesce (2001) considera que como docente, importa tener en cuenta que existe un período de transición entre el Ciclo Básico y el Bachillerato que debería respetarse proponiéndose, por ejemplo, actividades estratégicas que permitan acortar la frontera. En este sentido, esta misma autora plantea tres aspectos que caracterizan el análisis de este período transitorio:

- *“el traspaso de la responsabilidad del aprendizaje desde el profesor al alumno,*
- *cambio en la vinculación del alumno con las tareas rutinarias, con el tratamiento de la información visual y con los símbolos usados para designar tanto objetos como procesos matemáticos, y*
- *el incremento, en frecuencia y relevancia, de dos comportamientos matemáticos: la demostración y la definición”* (Calvo Pesce, 2001; 4).

A las consideraciones anteriores es posible agregar que incluso en los niveles educativos más avanzados de Bachillerato, la resolución de muchos problemas geométricos puede iniciarse mediante una fase básicamente exploratoria. Sin embargo, la validez o no de una respuesta dada pone en juego una serie de conocimientos: definiciones, relaciones y propiedades, específicas de cada situación y del desarrollo cognitivo logrado por cada estudiante.

Iztcovich (2005) asevera que el saber Geometría implica desplegar una racionalidad propia del trabajo geométrico e *“inferir a partir de los datos y con el apoyo de las propiedades, relaciones que no están explicitadas y que llevarán a establecer el carácter necesario de los resultados de manera independiente de la experimentación”* (Sadovsky et al, 1998, en Iztcovich, 2005; 12).

Este mismo autor sostiene que *“el trabajo geométrico ha ido perdiendo espacio y sentido, tanto en los colegios como en la formación docente”* (Itzcovich, 2005; 9) y por lo tanto el desarrollo de habilidades y destrezas que del trabajo geométrico se desprenden.

En efecto, la ausencia de las competencias consideradas necesarias para que el alumno pueda enfrentarse a los cursos de Bachillerato, constituye una de las tantas preocupaciones del Sistema Educativo Uruguayo. Tal es así que en los programas vigentes de los cursos más avanzados de Matemática del CES surgen consideraciones tales como: *“Se plantearán situaciones donde los estudiantes exploren, elaboren conjeturas y las demuestren. Por ejemplo, investigar la propiedad del cuadrilátero determinado por los puntos medios de los lados de un cuadrilátero cualquiera...”* (Programa de Matemática II, 2006; 4), *“... se pretende enfrentar al alumno con un método de trabajo más riguroso que el realizado en cursos anteriores”* (Programa de Matemática I, 2006; 1), *“Razonar, argumentar y justificar las afirmaciones debe formar parte del trabajo en el aula... La demostración debe ser considerada por los docentes y los estudiantes como un instrumento de validación y comunicación de producciones matemáticas”* (Programa de Matemática I, 2006; 3).

Las discusiones concernientes a la modalidad de enseñanza y de aprendizaje de la matemática, no son nuevas y es un tema que ha dado que hablar. De una prueba de Matemática propuesta por la Comisión Económica para América Latina y el Caribe (CEPAL) a alumnos de tercer año de Bachillerato, cuyos objetivos versaban en *“... identificar los conocimientos matemáticos efectivamente incorporados por los estudiantes a lo largo de casi doce años de educación formal”* y en *“captar la capacidad de razonamiento adquirida en tal período de escolarización”* (CEPAL, 1994; 28); se concluye que *“sólo 1 de cada 15 estudiantes aprobaría el test y con un criterio más benévolo (41% al 60%) lo haría 1 de cada 5”* (CEPAL, 1994; 29).

Según los resultados arrojados por las Pruebas PISA en Uruguay (2003), más allá de las influencias de los aspectos socioeconómicos y culturales que afectan el bajo desempeño académico, una de las principales deficiencias en los aprendizajes de las ciencias, en particular de la Matemática, está asociada a la imperiosa necesidad de rever el qué y el cómo se está enseñando y evaluando.

En una investigación realizada por Crespo Crespo y Ponteville (2004) sobre las concepciones de los docentes de matemática, se pone de manifiesto que *“no se distinguen claramente las diferencias entre la matemática, el saber matemático y el aprendizaje de la matemática en*

relación con las argumentaciones” (Crespo Crespo y Ponteville, 2004, en Crespo Crespo, 2005; 27). De esta investigación también se desprende que a pesar de que los docentes reconocen la existencia de diferencias en cuanto a lo específico conceptual de la Matemática; *“no reconocen los distintos niveles existentes entre qué es demostrar, qué es saber demostrar y qué es aprender a demostrar”*” (Crespo Crespo, 2005; 27).

De lo expuesto hasta el momento, se podría plantear entonces que son múltiples los obstáculos que giran en torno a los procesos de enseñanza y de aprendizaje de la Geometría en Bachillerato. Crespo Crespo (2005) considera que motivar a los estudiantes a explorar, analizar, efectuar conjeturas, detectar inconsistencia en los razonamientos y discutir fundamentadamente desde edades tempranas, permite evolucionar en los distintos niveles de pensamiento.

El período de transición al Bachillerato no es sencillo, por lo que el respetar los niveles de desarrollo y de madurez intelectual de los estudiantes es fundamental para el aprendizaje no sólo de la Geometría si no que de la Matemática en general.

En síntesis, la Geometría se caracteriza por presentar un carácter formativo. Es por eso que en el aula la mayoría de los docentes de Bachillerato trata de incentivar a sus estudiantes a hablar no solamente de lo que ve o experimenta, sino que además logre expresar sus ideas a partir de la construcción lógica de razonamientos. Sobre todo en aquellos niveles más avanzados de educación, se prioriza la elaboración de demostraciones cada vez más rigurosas dejando de lado los razonamientos derivados de la intuición y la experiencia, práctica validada durante los primeros años de educación formal.

Introducirse a problemas geométricos por medio de un campo exploratorio parecería ser una herramienta válida. Pero la validez en cuanto a la generalización de propiedades y elaboración de conjeturas dependerá de las condiciones que habiliten al estudiante a adentrarse en el trabajo de carácter lógico deductivo.

2.8. Saber docente: ¿decreto o experiencia?

“... el acto de compartir conocimiento es un acto de creación de conocimiento nuevo” (Harris, 2008, en Terigi, 2012; 38)

El mundo actual, un mundo globalizado, parecería que se mueve bajo los intereses del mercado y de aquellos sectores sociales más privilegiados. Las políticas curriculares concentran, transmiten, codifican un conjunto de saberes que atañen a diversos campos: político, económico, social, cultural. En estas se producen, se definen y organizan las identidades culturales y sociales.

Las políticas curriculares, ponen de manifiesto una serie de mandatos referentes tanto a qué contenidos enseñar, de qué manera, a quiénes; como a indicadores de éxito o fracaso social, relaciones de poder, producción de significados e identidades. El currículum, como *“...el espacio donde se concentran y desdoblán las luchas en torno a los diferentes significados sobre lo social y lo político”* (Da Silva, 1998; 62), forma parte de todos aquellos procesos de reformas y cambios educativos.

“Los grupos de interés que se encuentran tanto dentro como fuera del sistema pueden ejercer presión para que el contenido educativo refleje los avances científicos, se corresponda con cambios estructurales, o se adapte a nuevas teorías o filosofías de la enseñanza y el aprendizaje” (Rosenmund, 2008, en Benavot y Braslavsky, 2008; 279).

Como consecuencia los procesos de enseñanza y los de aprendizaje que se producen en las aulas se encuentran limitados por las condiciones del contexto (espacio físico, económico, social, cultural) y por las condiciones dadas en el currículum. A modo de círculo vicioso, las demandas sociales ejercen presiones sobre los contextos políticos y económicos, los que proyectan nuevas demandas sobre las instituciones educativas.

Si se tratara de explicar a un estudiante actual sobre las características de los sistemas educativos o la sociedad hace 30 años, difícilmente este estudiante encontraría puntos de

referencia con la educación y el mundo actual. Los valores sociales y la forma de vida, expone Esteve (2006, en Tenti Fanfani, 2006) han cambiado de manera drástica y el cambio que se ha dado a nivel económico y social, ha penetrado en los sistemas educativos de tal modo que los ha transformado en una realidad distinta.

Al respecto Meirieu (1992) afirma que estas transformaciones afectan la visión que la sociedad tiene con respecto al quehacer docente, su imagen como profesional de la enseñanza y la valoración que la comunidad hace sobre las instituciones educativas.

Cada vez son más las exigencias y responsabilidades que deben afrontar los docentes en el aula. Todas las necesidades que surgen a nivel político o administrativo convergen en nuevas exigencias sobre las instituciones educativas y como consecuencia sobre el accionar docente. Esteve (2006) sostiene que *“cada vez que hay un problema político o social difícil de resolver, se declara públicamente que se trata de un problema educativo y se sitúa uno de los ejes centrales de su resolución en el interior de las escuelas”* (Esteve, 2006, en Tenti Fanfani, 2006; 35). De esta manera las modalidades de enseñanza empleadas en el aula estarían subyugadas al contexto curricular, institucional, cultural, entre otros.

Jackson (2001) plantea que, para estudiar los procesos de enseñar y de aprender, es necesario extender el análisis más allá de las aulas. Si bien estos procesos se producen en las aulas, no pueden empezar y terminar limitándose al espacio físico concreto. Existen factores de distinta índole, tales como el contexto social y económico donde se encuentra ubicado el centro educativo, los principios y creencias por las cuales actúa el cuerpo docente, las políticas curriculares vigentes, los valores sociales y culturales, que han de atenderse pues influyen en las prácticas de enseñanza en las instituciones educativas.

“El contexto del aula”, plantea Torres Santomé (1991), *“como lugar donde se producen procesos de enseñanza y de aprendizaje tanto intencionados como no intencionados, tienen una serie de propiedades distintivas que afectan a las personas que allí interaccionan y actúan, pese al tipo de organización de los alumnos y alumnas que se hayan establecido y a la filosofía educativa a la que esté adherido el profesorado”* (Torres Santomé, 1991, en Jackson, 2001; 17).

Es necesario tener en cuenta también que en el aula intervienen una serie de elementos que condicionan las modalidades de aprendizaje y que quien enseña tendría que atender. Lo que el

docente hace afectaría la conducta de los estudiantes y por ende su rendimiento. A su vez, el desempeño de los estudiantes influiría en las acciones emprendidas por este.

El proceso de enseñanza llevado a cabo en el aula se encuentra asociado a una conjunto de supuestos y creencias sobre la tarea de enseñar y el modo en cómo esta es percibida por quien la imparte y una serie de limitaciones y oportunidades propias del contexto de cada centro educativo. “...las teorías y las creencias de los docentes, representa el amplio acervo de conocimientos que poseen y que afecta a su planificación y sus pensamientos y decisiones interactivos” (Clarck y Peterson, 1989, en Wittrock, 1997; 450).

“Para poder comprender lo que sucede en las aulas”, plantea Torres Santomé (1991), “es necesario tratar de explicar cuál es el conocimiento tácito de los profesores y profesoras, o sea de los constructos, principios y creencias con los que este colectivo de profesionales prácticos deciden y actúan” (Torres Santomé, en Jackson, 2001; 15).

Es así que el pensamiento de los docentes frente a qué hacer en el aula ha adoptado diferentes posturas y opiniones a lo largo de la historia. Las características específicas que acompañan a cada momento socio-histórico trae consigo una serie de creencias y supuestos sobre el qué y el cómo hacer en el aula. Estas condicionantes se ven reflejadas en el currículum, donde se prescriben los propósitos educativos fundamentales de cada época. Por ejemplo, como plantea Litwin (1996, en Camilloni et al, 1996), en los años setenta se valoraba todo aquello que hiciera referencia a leyes o procedimientos que brindaran mayor eficiencia y beneficio a cualquier propuesta de enseñanza y de aprendizaje. Se pensaba en la ciencia como el camino para descubrir la verdad universal, como una forma de descubrir regularidades y leyes que indicaran las clases de prácticas educativas más exitosas, de modo independiente de los intereses y características de los distintos grupos sociales. Pero el fracaso de este tipo de modelos técnicos llevó a desarrollar metodologías alternativas a la práctica profesional docente (Jackson, 2001).

No obstante, en la década de los ochenta, se incorporaron otras cuestiones que atienden a las propuestas curriculares, tales como aspectos concernientes a la transposición didáctica, comienza a hablarse de estrategias de enseñanza, de currículum oculto, entre otras. En este

orden de cosas, asevera Edelstein (1996), comienza a hacerse referencia al papel que juegan las experiencias educativas y lo metodológico en la actividad pedagógica. *“En general, se habla de “métodos”, en plural, aludiendo a construcciones elaboradas sobre la base de experiencias educativas concretas, sin explayarse demasiado en desarrollos discursivos de orden teórico”* (Edelstein, 1996, en Camilloni et al, 1996; 77).

Sin embargo, a pesar de la actualización significativa que se produce en la estructura de la didáctica, el tema método no surge siquiera sometido a la discusión y al análisis.

La estructura general del sistema educativo se ha visto atravesada por cambios sustanciales en las últimas décadas. Se transforman los objetivos a seguir por las instituciones educativas para la optimización de los aprendizajes, así como las ideas sobre las metodologías de enseñanza más adecuadas para lograrlos. Esta situación, genera cambios y desafíos en el profesor que enfrenta la necesidad de modificar su rol como transmisor de conocimientos y transformar su labor como facilitador y orientador del aprendizajes de los estudiantes (Esteve, 2006, en Tenti Fanfani, 2006).

Aceptar la existencia de condicionantes de las prácticas educativas: contenidos, contexto, sujetos; *“Implica reconocer al docente como sujeto que asume la tarea de elaborar una propuesta de enseñanza en la cual la construcción metodológica deviene fruto de un acto singularmente creativo de articulación entre la lógica disciplinar, las posibilidades de apropiación de ésta por parte de los sujetos y las situaciones y los contextos particulares que constituyen los ámbitos donde ambas lógicas se entrecruzan”* (Edelstein, 1996, en Camilloni et al, 1996; 85).

Por tal motivo, no sería justo limitar los procesos de enseñanza y de aprendizaje al espacio físico concreto o a contextos sociales, económicos, culturales. Toda acción llevada a cabo en el aula se encuentra sustentada por raíces más profundas. Existen valoraciones implícitas, supuestos y preferencias que efectivamente condicionan las decisiones sobre el accionar docente. En ocasiones bajo formas debidamente pensadas, planificadas, en ocasiones bajo la inmediatez de las circunstancias, los determinantes de las decisiones llevadas a cabo en el aula

están sustentados por actos reflexivos que actúan sobre dimensiones morales, sociales y culturales.

“El conocimiento profesional del profesorado se va construyendo poco a poco, sobre la base de las interpretaciones de las situaciones en que se ven envueltos en sus centros y aulas escolares y del resultado de las decisiones que adoptan” (Torres Santomé, 1991, en Jackson, 2001; 13).

Este conocimiento es cimentado, construido y transformado sobre la base de las vivencias cotidianas. Las experiencias vividas y la necesidad constante de la toma de decisiones llevaría a que los docentes muchas veces elaboren teoría sobre sus prácticas, teorías sustentadas en las reflexiones sobre sus propias clases (Esteve, 2006, en Tenti Fanfani, 2006). Estas construcciones, raramente editadas, abarcan un amplio conocimiento sobre las concepciones que hacen a las mejores prácticas, a las modalidades consideradas más exitosas en lo concerniente a los procesos de enseñanza y de aprendizaje. Esto incluye desde contenidos curriculares, conocimientos logrados por ensayo y error, las técnicas o procedimientos sobre modalidades de enseñar o de aprender, cuál es el rol del docente y el del alumno, entre otras.

Al hacer referencia a este conocimiento elaborado, desarrollado y perfeccionado a partir de la experiencia en el salón de clases, el docente construye lo que Kincheloe (2001) ha dado en llamar *conocimiento del practicante*. Este saber fruto de la práctica de aula y del afrontar desafíos y situaciones de diversa índole día a día, empapa al profesorado de producciones teóricas producto de la empírea y la intuición.

Kincheloe (2001) expone que *“A medida que la ciencia de la educación formula su maleficio para mantener la experiencia alejada del conocimiento verificado, se va abriendo un cisma entre el discurso oficial que la ciencia moderna exige y el discurso motivador que el cuerpo docente desarrolla mediante la acción. El profesorado queda al fin personalmente excluido de los procesos de producción de conocimiento relacionado con su propia profesión...”* (Kincheloe, 2001; 50).

A pesar de que quien enseña adquiere mucho de sus conocimientos del contexto, esta modalidad de conocimiento no es reconocida ni validada curricularmente como una modalidad de práctica educativa. El sistema educativo espera que el docente atienda los dictámenes propuestos por los intereses políticos de la cultura y el mercado. Sin embargo, el accionar de las personas no puede ser concebido en forma aislada del entorno, la clase social y cultural, emociones, intenciones, historias. Piaget (1998) sostiene que las personas entran en contacto con su entorno, reflexionan sobre él e interactúan, construyen su propia historia y producen un conocimiento a través de transformaciones cognitivas y autorregulación.

La subjetividad, expresa Kincheloe (2001) está determinada por las luchas de poder emanadas de los discursos sociales, económicos, políticos. De este modo, *“la escuela pone el énfasis en determinadas formas de comportamiento, en lugar de hacerlo sobre determinado cuerpo de conocimientos y habilidades”* (Kincheloe, 2001; 124).

Como resultado, las instituciones de Educación Secundaria se vuelven transmisoras de valores éticos y morales, de comportamientos sociales, de juicios dominantes sobre el trabajo y el respeto a la autoridad, producto del significado otorgado por los grupos de poder, de los intereses políticos y del mercado. En el currículum se verían reflejados estos mandatos, por lo que en él se presentarían por un lado el conjunto de conocimientos que ha de transmitirse a los estudiantes y, por otro, las metodologías más propicias para cumplir con sus objetivos.

Es así que para alcanzar un entendimiento de lo que ocurre en el salón de clases, se requiere de la comprensión de los conocimientos, las ideologías, las opiniones, los juicios y los principios de los docentes.

En síntesis, el pensamiento docente juega un papel central en los procesos de enseñanza desarrollados en el aula. Si bien algunos procesos de pensamiento no son visibles ya que corresponden a sentimientos, emociones y percepciones interiores de cada persona, existen juicios y opiniones que pueden verse reflejadas a través de las acciones llevadas a cabo antes, durante y después de las prácticas de aula, como por ejemplo: planificaciones, toma de decisiones ante imprevistos, autocrítica, entre otros.

Como consecuencia, la acción del docente frente a su clase y las decisiones que adopte en cuanto a sus metodologías de enseñanza se origina en sus procesos de pensamiento.

Cada decisión que toma el docente al momento de planificar está influida por sus creencias y percepciones en cuanto a lo que es mejor hacer de qué manera de acuerdo con el contexto en el que se encuentre inmerso. Toda acción empleada en el aula afecta la conducta de los estudiantes, sus procesos de aprendizaje y como consecuencia su rendimiento.

El accionar docente surge como fruto de atravesamientos que abarcan el entorno, la clase social y cultural pero también el conocimiento de la disciplina. El saber docente, no es solamente el saber académico, sino que es un saber que resulta de la base de la propia experiencia e intuición y además condicionado por un sistema educativo sujeto a intereses de la cultura y el mercado.

2.9. Estrategias de enseñanza en el aula

“Ser capaces de visualizar, oír y sentir, con la imaginación, aspectos de una situación o problema por resolver nos da la oportunidad de ensayar” (Eisner, 1998; 63).

El aula se presenta como un espacio de encuentro entre docentes, alumnos y conocimientos. Este es un ámbito donde se consolidan estrategias que permiten establecer conexiones a través de diversas situaciones y ponen en juego los procesos de enseñanza. Entre ellas, en este trabajo, se destacan la modelización y el tratamiento del error y la pregunta.

2.9 a. La modelización

Autores como Sadovsky (2005) y Chevallard et al (1997), consideran que la modelización Matemática favorece la producción de conocimiento. La modelización supone enfrentar al alumno a una cierta problemática en la que intervienen diversidad de factores y variables, siendo necesario explorar, analizar, interpretar y establecer relaciones entre las nuevas variables y los conocimientos que él ya tiene mediante el empleo de un sistema Teórico – Matemático con la finalidad de desafiar al alumno a producir nuevos conocimientos. De esta interacción, afirman ambos autores, los estudiantes podrán establecer razonamientos y conjeturas con el objetivo de producir nuevos saberes.

“Desafiar a un alumno”, expresa Sadovsky (2005), “supone proponerle situaciones que él visualice como complejas pero al mismo tiempo posibles, que le generen una cierta tensión, que lo animen a atreverse, que lo inviten a pensar, a explorar, a poner en juego conocimientos que tiene y probar si son o no útiles para la tarea que tiene entre manos, que lo lleven a conectarse entre sus compañeros, a plantear preguntas que le permitan avanzar...” (Sadovsky, 2005; 13).

Por su parte Eisner (1998) considera que la producción de conocimiento tiene orígenes tanto cognitivos como afectivos. Esto se debe a que los sentidos –lo visual, el tacto, el gusto, el olfato, el oído- constituyen un fuerte componente en los sistemas de recolección de la información. Para este autor los sentidos permiten desarrollar la intuición y establecen la primera forma de relacionamiento con el objeto. *“Tener intuición”, expresa Eisner (1998), “es formarse una idea de algo, ver algo antes no visto, captar algo por los sentidos” (Eisner, 1998; 59).* De este modo, la primera aproximación que el estudiante tendría con el objeto matemático se produciría a través de los sentidos, por lo que la construcción que se realice estaría inicialmente determinada por el sistema sensorial que se utilice.

Desde esta perspectiva el trabajo en el aula por medio de la modelización, enriquecería la experiencia de producción de conocimientos. Se generaría en el alumno tanto la posibilidad de desarrollar la intuición como la necesidad de posicionarse ante cierto marco de referencia matemático que le permita abordar la situación a la que se enfrenta, relacionando conceptos e integrando a sus razonamientos formas de representación que le ayuden en la tarea de elaboración, contrastación, validación y generalización de conjeturas.

Se podría plantear entonces que en una situación de enseñanza el empleo de algún tipo de recursos didácticos actuaría a modo de soporte para la modelización del objeto matemático en cuestión.

Si bien existen diferentes posturas respecto al significado que ha de dársele al concepto de recursos didácticos, en el presente trabajo se ha optado por atender la definición establecida por Mattos (1963) quien expresa que los recursos didácticos son “*Los medios materiales de que se dispone para conducir el aprendizaje de los alumnos*” (Mattos, 1963, en Moreno Herrero, 2004; 2).

La selección de situaciones problemas a través de textos, materiales concretos, materiales tradicionales o medios informáticos constituirían para los docentes estrategias materiales a implementar en una situación de enseñanza con la finalidad de favorecer los procesos de aprendizajes.

Los diferentes recursos llevados al aula, dan cuenta de un propósito pensado por quien enseña, con la finalidad de que el estudiante recoja información, analice datos, ponga en juego conocimientos previos, genere y comparta estrategias de resolución y encuentre posibles soluciones a la situación planteada (Torp y Sage; 1998). El recurso empleado constituye un disparador de esta experiencia en tanto que favorece la construcción del objeto en cuestión.

Cada uno de los recursos que se utilizan para la resolución de una situación de aula, ya sea desde figuras de análisis, materiales concretos o software educativos, sirven de soporte y facilitan diversas formas de representación del objeto matemático con el que se desea trabajar. Este tipo de materiales, exponen Chevallard et al (1997), se encuentra relacionado al concepto matemático en cuestión al presentar una correspondencia estructural y constituirse en un posible sostén en la elaboración inicial de una representación conceptual.

2.9 b. El error y la pregunta

En el aula también intervienen otro tipo de estrategias que contribuyen con el proceso de enseñanza: el tratamiento del error y la pregunta.

Los errores forman parte de los aprendizajes de los estudiantes y el tratamiento que el docente le otorgue al error sería determinante de los logros o los fracasos que se generan en el aula. *“En las actuales investigaciones se realiza una apertura a la necesidad de que los alumnos perciban los errores, darle un lugar en la clase al error, trabajar descubriendo las hipótesis falsas que llevaron a producirlo, buscando posibles caminos hasta redescubrir los conceptos validados y matemáticamente aceptados, comparando versiones correctas con erróneas. El alumno debe participar activamente en el proceso de superación de sus errores”* (Bernabeu, León, Jiménez y Matos, 2009; 13).

La pregunta constituye una de las estrategias mayormente empleadas por los docentes a modo de motivar y generar en los estudiantes la necesidad de dar respuestas a interrogantes planteadas, producción de ideas, resolución de problemas. *“... una buena pregunta”* aseveran Bressan, Pérez y Zolkower (2007), *“es aquella que nos plantea algo interesante, motivador, atrayente, pero también debe estar al alcance de nuestras posibilidades de ser respondida”* (Bressan et al, 2007; 3).

Estas son implementadas por los docentes a modo de estrategia con la finalidad de generar instancias que favorezcan el desarrollo del pensamiento reflexivo y crítico. Litwin (1996, en Camilloni et al, 1996), considera que el estudiante puede lograr procesos de reflexión que promuevan la construcción de nuevos saberes a partir tanto de las preguntas como de las explicaciones. Esta autora señala también que *“las interacciones en el aula... garantizan la producción de conocimientos”* (Litwin, 1996, en Camilloni et al, 1996; 109).

Según Brousseau (2007), estas interacciones son logradas a partir de las acciones llevadas a cabo por quien aprende con sus pares, con el docente y con el entorno. El espacio físico le brinda información que permite producir o modificar los conocimientos. De este proceso de interacción y retroalimentación con otros y con su entorno, el estudiante logra nuevos

aprendizajes. La producción de conocimientos resultante de este intercambio permite ahondar en las ideas y pensamientos.

Sadovsky (2005) considera que cuando el alumno se enfrenta por primera vez a una situación que ha de resolver, se genera una instancia de incertidumbre y de toma de decisiones. Ante cada nuevo escenario el estudiante ha de explorar, evaluar y pensar primero individualmente para luego compartir sus razonamientos. Si el trabajo es propuesto en forma grupal, se hará necesario hacer públicas las conjeturas efectuadas. Esto generará instancias de evaluación y debate por quienes participan en el grupo, abriendo espacio a procesos de producción colectiva.

“Sin embargo, hay momentos en los que las cuestiones nuevas que los alumnos enfrentan dan lugar a incertidumbres tales que la interacción con los pares legitima nuevas preguntas que inauguran otros posibles para el trabajo matemático” (Sadovsky, 2005; 61). Ante estas situaciones es la labor del docente brindar las herramientas necesarias para que el alumno logre completar la elaboración de pensamientos.

En síntesis, a través de la modelización en el trabajo de aula se coloca al estudiante en una situación de producción de conocimiento, donde el explorar, interpretar, organizar, establece un acercamiento al objeto matemático y por lo tanto a la producción de conocimientos.

El empleo de algún tipo de recurso didáctico actuaría de soporte para la modelización del objeto matemático y facilitaría los aprendizajes en los estudiantes.

Lograr aprendizajes mediante procesos de modelización matemática, de resolución de situaciones problemáticas y de la interacción con otros, hace posible estimular a los estudiantes favoreciendo el desarrollo de estrategias que permitan dar soluciones satisfactorias a los problemas que les son propuestos.

Para ello el docente ha de poner en juego estrategias de enseñanza diferentes con el fin de estimular un desarrollo integral de quienes aprenden y de promover verdaderas situaciones de aprendizaje. Por consiguiente, y atendiendo a la definición manejada por Mattos (2004), una estrategia docente radicaría en la pertinencia en cuanto a la selección del recurso a emplear.

El trabajo a partir del error y de la pregunta abre espacios para producir ideas, resolver situaciones problemas y lograr procesos de reflexión en la construcción de nuevos conocimientos.

Cada docente, expone Sadovsky (2005), requiere de un proyecto de enseñanza que atienda el qué se quiere enseñar y de qué manera hacerlo. Qué problemas, propiedades, técnicas y formas de representación perseguirá y qué asuntos fundamentará y cómo lo hará son aspectos que ha de atender si desea que sus alumnos reflexionen ante la problemática que se le plantea.

2.10. La demostración en la enseñanza

“Las matemáticas presentadas con rigor son una ciencia sistemática, deductiva, pero las matemáticas en gestación son una ciencia experimental, inductiva”

(Polya, 1944, en Godino y Recio; 2001; 411)

El proceso de validación de una conjetura elaborada por un estudiante o grupo de estudiantes resultante de la resolución de un problema, es una práctica llevada adelante en muchas aulas. En general, los programas de los cursos de los diferentes niveles de educación formal proponen que los estudiantes logren establecer con mayor o menor rigor, argumentos que den cuenta de la garantía de sus producciones (Godino y Recio, 2001).

En los distintos años de la Educación formal, se trata de que el estudiante busque dar prueba de la credibilidad de una afirmación, ya sea desde la verificación de resultados mediante la elaboración de cálculos o la experimentación en los primeros años, hasta la producción de razonamientos matemáticos elaborados mediante rigurosos métodos deductivos en los niveles más avanzados.

Sea cual sea el contexto institucional, *“...el estudiante de matemáticas tiene que convencerse, y explicar su convencimiento...”* Godino y Recio, 2001; 411).

Particularmente en Bachillerato se busca que el estudiante logre la transición hacia el pensamiento matemático avanzado. El método de validación que se aspira alcanzar es la demostración (Programa de Matemática I, 2006), entendiendo por ello la acción empleada al establecer una secuencia lógica de enunciados que dan prueba, consecuentemente, de un nuevo enunciado (Azcárate, 2003).

La comprensión del significado de la demostración, explican Godino y Recio (2001), integra la acción del intentar demostrar.

Por su parte para Bravo y Arrieta (2005), la demostración presenta aportes significativos en la formación integral del individuo, tanto en lo concerniente al desarrollo intelectual como a la forma de pensar y de actuar.

Ambos autores consideran que la demostración cumple con una variedad de funciones:

- Verificación: como forma de comprobar, convencer y sostener la certeza de una afirmación efectuada.
- Iluminación: término propuesto por Ibáñez (2001) al hacer referencia a una función explicativa de la demostración al establecer el por qué una afirmación es cierta.
- Sistematización: integración de conceptos, definiciones, propiedades que constituyen la estructura axiomática de la Matemática.
- Además de cumplir con otro tipo de funciones como lo son la exploración y el descubrimiento, la de comunicación de los hallazgos realizados como forma de manifestación del pensamiento y la función de reto intelectual.

La preocupación que gira en torno al tratamiento de los procesos de validación seguido por los estudiantes es grande. Autores como Matín y Harel (1989, en Martínez Recio, 2001), realizaron una investigación sobre las formas personales de demostración Matemática, dando cuenta de la dificultad que, aún estudiantes de niveles terciarios, presentan en torno a la demostración Matemática al aceptar argumentos empírico-inductivos como forma de validación de una conjetura.

A modo de ejemplo es posible citar una investigación llevada a cabo por Recio y Godino (1996) a alumnos universitarios donde constataron que solamente el 32,9% de los estudiantes

“fueron capaces de desarrollar, de modo formal, las dos demostraciones, extremadamente simples, que se les reclamaba” (Martínez Recio, 2001; 30).

Las dificultades implicadas en cuanto a las modalidades de abordaje de las demostraciones geométricas en cursos de Bachillerato no son ajenas a esta situación. Desde hace varios años se discute sobre la enseñanza de las demostraciones en Educación Secundaria, particularmente en lo que a la Geometría refiere (Godino y Recio, 1996; Martín y Harel, 1989; Martínez Recio, 2001; ANEP, 2007).

Existen investigaciones que dan cuenta de que los estudiantes tienden a confundir el dar razones ante un razonamiento realizado con el explicar los pasos efectuados.

Para de la Torre (2003) *“La prueba, debería ser parte del proceso de resolución de problemas, logrando que los estudiantes fuesen capaces de mezclar deducción y experimentación, idear representaciones, trazar diagramas, moverse entre diferentes representaciones”* (de la Torre, 2003; 2), para lograr avanzar en forma paulatina en el aprendizaje de la argumentación.

Sin embargo, los conflictos por los que muchas veces atraviesa el alumno para aceptar y comprender la necesidad de una demostración lógica de los conceptos geométricos son de peso.

La problemática se hace más notoria al constatar que la mayoría de los estudiantes necesitan de una acumulación de hechos confirmatorios a modo de aceptación de un fenómeno. En una investigación realizada por Fischbein (1982, en Martínez Recio, 2001), solamente el 14,5% de los estudiantes que participaron de ella, mostró haber aceptado la demostración como una verdad resultante de un razonamiento lógico deductivo sin la necesidad de una acumulación de hechos y argumentaciones que confirmen la veracidad del enunciado en cuestión.

En un estudio llevado a cabo por Recio (2000), se constató la existencia de cuatro *“tipos básicos de esquemas personales de demostración matemática”* empleados por los estudiantes (Martínez Recio; 2001; 33):

- *Argumentación explicativa.* Sin carácter validativo y presentes bajo formas elementales de argumentación. El propósito que estos esquemas encierran es esencialmente el de explicar, dar sentido a un concepto matemático. Es el primer escalón en el inicio de la demostración.

- *Argumentación empírico – inductiva.* En este se trata de comprobar el cumplimiento de un enunciado a partir de la constatación del cumplimiento de casos particulares.
- *Prueba deductiva informal.* Este esquema se caracteriza por el empleo de modelos isomorfos con los que se busca argumentar de manera lógica aunque informal el cumplimiento o la validez de un objeto geométrico.
- *Demostración deductiva formal.* Corresponden a argumentaciones basadas en un conjunto de axiomas rigurosamente entrelazados mediante estructuras lógicas de razonamiento. Si bien la intuición puede aparecer como un modelo orientador, la demostración lógico formal no es sustituida por ningún elemento proveniente de la percepción o la subjetividad.

Los procesos de validación seguidos por los alumnos también son estudiados por Balacheff (2000), concluyendo que el modo en que estos conciben la Matemática es determinante en el proceso que realizan, especialmente en el tratamiento de refutaciones. Señala, además, que existen múltiples factores intervinientes en los procesos empleados por los estudiantes de Matemática para validar o refutar un enunciado. Uno de ellos es la experiencia que lleva a la validación de un enunciado por la verificación de ejemplos y que usualmente desaparece cuando es puesto en juego el racionalismo lógico. Otro es, por ejemplo, la lectura de la situación que el alumno realiza al buscar un simple gesto de aprobación o no por parte del docente.

Por su parte de la Torre (2003), considera que la dificultad en cuanto a la enseñanza de las demostraciones suele estar asociado a la reproducción de un mecanismo de resolución. Es así que el docente de Matemática muestra un ejemplo explicitando cómo se realiza una demostración y espera que el alumno se apropie y reproduzca este proceso.

Otro obstáculo para el estudiante, reside en considerar que una demostración es correcta sólo cuando se ha establecido una secuencia lógica de enunciados que son avalados por el profesor, sin considerar que “*la demostración propuesta puede ser torpe, confusa, incompleta e insuficiente, sin que por lo tanto sea falsa*” (Balacheff, 2000; 5).

Este mismo autor sostiene que el estudiante tiende a rechazar la pertinencia de los contra ejemplos a modo de refutar una situación propuesta y como método de validación (esa situación no se cumple para todos los casos y por ende no es válida). Se presenta así un doble

conflicto. Por un lado el rechazo al contra ejemplo por carecer de una estructura lógica y simbólica propia de las demostraciones y, por el otro, el aceptar que es posible que existan excepciones a la regla.

Para Godino y Recio (2001), la mente del estudiante debe atravesar por cambios significativos para que comprenda lo que en efecto implica una demostración Matemática. “... *la construcción de esta racionalidad es un proceso progresivo que requiere tiempo, así como adaptaciones ecológicas del “objeto prueba” (transposiciones didácticas) en los distintos niveles de enseñanza*” (Godino y Recio; 2001; 412).

Por su parte, Balacheff (2000) considera que el obstáculo no solamente se encuentra en las dificultades que presentan los estudiantes por las carencias conceptuales y la inmadurez en sus esquemas lógicos de pensamiento, sino que la constitución del sistema didáctico muchas veces propuesto no favorece el desarrollo del pensamiento hipotético deductivo. Tal es así que el docente no cuenta con herramientas que le den a conocer los factores que conducen a los estudiantes a “*preferir modificar una conjetura, introducir una condición o, por ejemplo, reconsiderar el dominio de validez, e, inclusive, la definición de los objetos en cuestión*” (Balacheff, 2000; 177).

Crespo Crespo (2005) considera que el docente enseña una demostración o enseña a demostrar de acuerdo con sus propias concepciones. Si la Matemática es considerada como una disciplina que puede ser adaptada a la situación escolar que se presente, entonces es posible que el docente considere que el estudiante puede “hacer Matemática”. Es así que la demostración es entendida como parte de un contenido más de la currícula y por lo que adoptará un carácter dinámico, modificable y adaptable al contexto. Sin embargo, si la demostración es entendida como una estructura rígida, acabada, propia de los libros, difícilmente introduzca modificación al texto, transmitiendo que la demostración es algo que debe ser memorizado (Crespo Crespo, 2005).

Por su parte, para Duval (2006) el problema tiene raíces más profundas. Considera que el problema se encuentra asociado al cómo los estudiantes emplean uno u otro registro de representación dependiendo de la actividad propuesta sin reconocer la relación existente entre diversos sistemas de representación semiótica. Consecuentemente, el pensamiento matemático que se ponga de manifiesto en la resolución de una situación problema, estaría supeditado a la construcción de la “*coordinación interna*” (Duval, 2006; 145) que el alumno sea capaz de realizar.

Este autor considera que la necesidad de trabajar conjuntamente con varios sistemas de representación es notoriamente más visible en Geometría donde las representaciones visuales desencadenan procesos cognitivos diferentes de aquellos procesos puestos en juego mediante el enunciado verbal del discurso. Es imprescindible que el estudiante naturalice la etapa de visualización como una condición necesaria a la hora de enfrentarse a la resolución de situaciones problema y asimile la necesidad de conversión entre ambos sistemas de representación. “... *a menudo*” asevera Duval (2006), “*son necesarios estos dos tipos de tratamiento: uno se produce de forma discursiva, por deducción válida de propiedades de los datos y de teoremas que implica el uso del lenguaje; el otro se produce de una manera visual a través de las diversas reorganizaciones de las formas*” (Duval, 2006; 147).

Chevallard et al (1997) consideran que el emplear en el aula de Matemática ejemplos relacionados con el mundo real favorecería el pasaje de una forma de representación a otra, así como también el uso de diferentes símbolos (figuras, expresiones algebraicas, ejemplos numéricos, entre otros) que identifiquen las mismas propiedades en referencia a un mismo concepto. Esto constituye para el alumno una doble demanda. Por un lado la vivencia de experiencias que habiliten el pasaje de lo aprendido en el contexto diario a las representaciones de los contenidos adquiridos en el aula y por el otro el pasaje de un sistema de representación a otro, entendiendo que ello no implica un cambio en las características del objeto matemático en cuestión.

En síntesis, el trabajo con la demostración en el aula cumple una gran variedad de funciones que apuntan a un desarrollo integral de la persona, atendiendo capacidades para abstraer,

analizar, comparar, clasificar, argumentar, fundamentar aceptar o rechazar una idea, deducir, reflexionar, comunicar, generalizar.

El tratamiento de las demostraciones en el ámbito de Educación Secundaria atravesaría por diferentes etapas dependiendo del nivel educativo en que el estudiante se encuentre. Una primera etapa empírico inductivo donde el juego, la experimentación y el descubrimiento juegan un papel fundamental en la construcción de los razonamientos. Una segunda etapa donde se espera una mayor madurez en los esquemas cognitivos de los estudiantes en la cual entran en juego procesos de matematización más avanzados: formas de comunicación de enunciados y de validación de los mismos mediante procesos de argumentación más elaborados.

Pero para que pueda darse un pasaje entre los distintos niveles sería necesario que el estudiante fuera articulando progresivamente los distintos esquemas de demostración; poniendo en juego en el aula de Matemática prácticas argumentativas que permitan avanzar paulatinamente en los procesos de validación de las conjeturas efectuadas.

3. Marco metodológico

“El método es el camino que conduce al conocimiento...”

(De Gortari, 1979, en Calderón Hernández, 2005; 25).

La presente investigación pretendió dar cuenta de las metodologías de enseñanza de la Geometría en los cursos más avanzados de Educación Secundaria, en particular en la enseñanza de conceptos geométricos y del trabajo con las demostraciones geométricas. Ello supuso un desafío para lo que fue imperioso definir los caminos a seguir que dieran respuesta a las interrogantes planteadas.

Como investigador, surgió la necesidad de posicionarse frente al objeto de estudio atendiendo la selección del plano ontológico (mundo real de análisis), del plano epistemológico (análisis del saber) y del plano metodológico (elección del método).

El primer reto consistió en la selección de un paradigma de abordaje de esta investigación. *“Un paradigma”*, expresa Ritzer (1993), *“es una imagen básica del objeto de una ciencia. Sirve para definir lo que debe estudiarse, las preguntas que es necesario responder, cómo deben preguntarse y qué reglas es preciso seguir para interpretar las respuestas obtenidas....”* (Ritzer, 1993, en Valles, 2007; 48). Este trabajo fue abordado desde un paradigma tanto cuantitativo como cualitativo. El primero, basado en una concepción positivista, enfocado hacia los resultados, de carácter impersonal y objetivo y basado en un método hipotético deductivo. En contraposición, el segundo, de carácter fenomenológico (entendiendo al mundo como algo no acabado y el espacio donde los sujetos que de él participan lo modifican y le dan sentido), subjetivo e inductivo (Cook y Reichard, 1986; en Valles, 2007).

El empleo de un modelo mixto, tanto cualitativo como cuantitativo potenció *“el desarrollo del conocimiento, la construcción de teorías y la resolución de problemas. Ambos son empíricos, porque recogen datos del fenómeno que estudian. Tanto el uno como el otro requieren de seriedad, profesionalismo y dedicación...”* (Hernández Sampieri et al, 2010; 18).

La aplicación de ambos modelos permitió recoger diferentes datos, brindando mayor riqueza interpretativa, potenciando la obtención de datos de la realidad, construcción de conocimientos y la relación entre el investigador y lo investigado. Se buscó indagar en las

características más sobresalientes de las metodologías de enseñanza de la Geometría empleadas por los docentes de Bachillerato.

El propósito fundamental de esta investigación fue la recolección y análisis de datos que permitieran caracterizar y describir el abordaje metodológico de la enseñanza de la Geometría en Bachillerato. Por consiguiente, se adoptó un carácter básicamente descriptivo, buscando dar cuenta de las características subyacentes a las metodologías de enseñanza llevadas a cabo por un grupo de docentes que dictan clases en cursos de Bachillerato plan 2006 en el interior del país y cuyos programas incluyen unidades relativas a la enseñanza de conceptos geométricos.

3.1. El diseño

“Diseñar”, expone Valles (2007), “*significa, ante todo, tomar decisiones a lo largo de todo el proceso de investigación y sobre todas las fases o pasos que conlleva dicho proceso*” (Valles, 2007; 78). Por consiguiente, al pensar el diseño de investigación fue necesario planificar las estrategias de recolección de datos que permitieran construir respuestas a las preguntas formuladas. A partir de allí se determinaron las particularidades metodológicas que fueron consideradas más adecuadas para llevar adelante dicha labor.

Este trabajo de investigación se caracterizó por presentar un enfoque bimodal o mixto, por lo que las técnicas de recolección y análisis de la información requeridas para dar respuestas a las interrogantes planteadas correspondieron a métodos de corte tanto cualitativos como cuantitativos, respetándose en cada caso los principios de fiabilidad (teniendo en cuenta características de replicabilidad y consistencia) y validez (atendiendo condiciones de exactitud y generalidad) correspondiente a cada técnica empleada. La integración y discusión de la información recabada en forma conjunta, permitió una mejor comprensión del fenómeno investigado.

Al respecto, Creswell (2009) explicita que “...*aquellos problemas que necesitan establecer tendencias, se “acomodan” mejor a un diseño cuantitativo; y los que requieren ser explorados para obtener un entendimiento profundo, “empatan” más con un diseño cualitativo*” (Creswell, 2009, en Hernández Sampieri et al, 2010; 549).

El emplear un diseño mixto permitió obtener una visión más global y profunda del objeto estudiado ya que admitió una mayor indagación y aprovechamiento de los datos. Con él se exploró un mismo fenómeno con una mirada más amplia y atendiendo aspectos referentes tanto al método cualitativo (como profundidad, complejidad, comprensión) como al cuantitativo (como generalización, amplitud).

Cualitativo

En primer lugar se realizó un análisis documental donde se estudió la bibliografía existente tales como planes y programas propuestos por el CES.

En segundo lugar se procedió a la aplicación de una entrevista a docentes y a un actor calificado con el fin de lograr un mayor entendimiento de la realidad estudiada.

En una tercera instancia se retoma el análisis documental. Se analizan documentos elaborados por los docentes entrevistados, tales como planes anuales, pruebas diagnóstico, con el fin de contrastar las opiniones expresadas durante las entrevistas con los planteos realizados al inicio de los cursos.

Por la presencia de diversos escenarios que pueden interferir en los procesos de enseñar y de aprender es que en esta investigación se entendió pertinente estudiar las cuestiones tenidas en cuenta por los docentes al momento de abordar sus prácticas de enseñanza de la Geometría en Bachillerato más allá de las prácticas mismas.

Reconocer la influencia en el quehacer docente de cuestiones que van más allá del espacio de aula, *“Implica reconocer al docente como sujeto que asume la tarea de elaborar una propuesta de enseñanza en la cual la construcción metodológica deviene fruto de un acto singularmente creativo de articulación entre la lógica disciplinar, las posibilidades de apropiación de ésta por parte de los sujetos y las situaciones y los contextos particulares que*

constituyen los ámbitos donde ambas lógicas se entrecruzan”(Edelstein, en Camilloni et al, 1996; 85).

No obstante, se atendió la opinión de un experto con vasta experiencia en observaciones de clase con el propósito de contrastar las valoraciones que los docentes hacen acerca de sus propias prácticas.

Cuantitativo

Se recurrió al empleo de una encuesta que permitiera obtener un conocimiento más amplio del contexto en el cual se estaba trabajando, con la finalidad de conocer la metodología de trabajo mayoritariamente adoptada por los docentes de Matemática que dictan clases en Bachillerato en los liceos donde se investigó, así como también conocer características referentes al perfil de los docentes, tales como su formación, la antigüedad en el sistema, entre otras.

Este trabajo llevado a cabo en cuatro etapas, requirió del empleo de estrategias de recolección de datos en forma correlacional, proponiéndose un acoplamiento de la entrevista a la encuesta y estableciéndose en forma casi paralela el estudio de documentos.

Esto permitió, como lo expresan Rodríguez Ruiz (2005), *“aprovechar los puntos fuertes de cada una de ellas y cruzar datos”* (Rodríguez Ruiz, 2005; 1) (ver cuadro 3).

El siguiente cuadro da cuenta de los distintos momentos llevados a cabo durante el proceso de obtención y análisis de datos.

Cuadro 3: Momentos del proceso de obtención y análisis de datos

Momento 1: Estudio Cualitativo	Análisis documental: estudio de planes y programas vigentes.
Momento 2: Estudio Cuantitativo	Recolección de datos por medio de una encuesta.
Momento 3: Estudio Cualitativo	Recolección datos mediante entrevistas a docentes y a un actor calificado.
Momento 4: Estudio Cualitativo	Análisis documental: estudio de la documentación elaborada por cada docente.

Fuente: Elaboración personal

Finalizadas cada una de las instancias mencionadas anteriormente y con el fin de buscar una mayor validez de las conclusiones halladas, se procedió a triangular los datos obtenidos durante cada etapa del trabajo de campo con la finalidad de extraer conclusiones y documentar principales hallazgos.

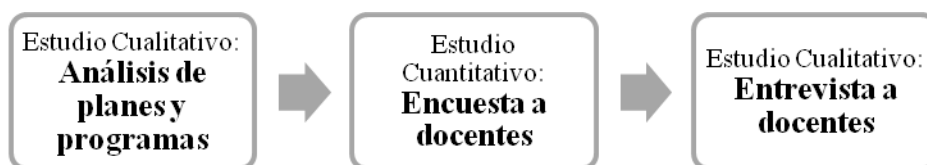
“La triangulación de datos supone el empleo de distintas estrategias de recogida de datos. Su objetivo es verificar las tendencias detectadas en un determinado grupo de observaciones” (Rodríguez Ruiz, 2005; 1). En este caso se procuró aplicar distintas técnicas de recolección con la finalidad de recabar, analizar y contrastar elementos que permitieran caracterizar las metodologías de enseñanza de la Geometría en Bachillerato con la mayor validez posible.

“...la triangulación entre métodos se convierte en vehículo para la validación cruzada (Jick, 1979), cuando se alcanza los mismos resultados con métodos distintos, pero que apuntan a la misma dimensión del problema de investigación” (Cea D’Ancona, 1998; 52).

La validación entre métodos llevada adelante en esta investigación fue secuencial, ya que los resultados obtenidos con cada una de las técnicas empleadas permitieron avanzar en el trabajo de campo. Del primer análisis documental, estudio de planes y programas vigentes, se estableció el perfil de los docentes con los cuales trabajar para la aplicación de las encuestas. Para ello se realizó un estudio exhaustivo de los programas de Bachillerato procurando detectar aquellos cursos que presentaran, al menos, en alguna de sus unidades, el tratamiento de contenidos geométricos. Esta tarea se llevó a cabo con la finalidad de encuestar al 100% de los docentes que tuvieran a cargo dichos cursos.

Las encuestas brindaron la información necesaria para la selección de los docentes que participarían en las entrevistas. De este modo el método cualitativo aportó datos para la aplicación de la técnica de recolección cuantitativa (Qual a Quan) y en la segunda instancia la técnica cuantitativa permitió proceder con la aplicación del método cualitativo (Quan a Qual) (Rodríguez Ruiz, 2005).

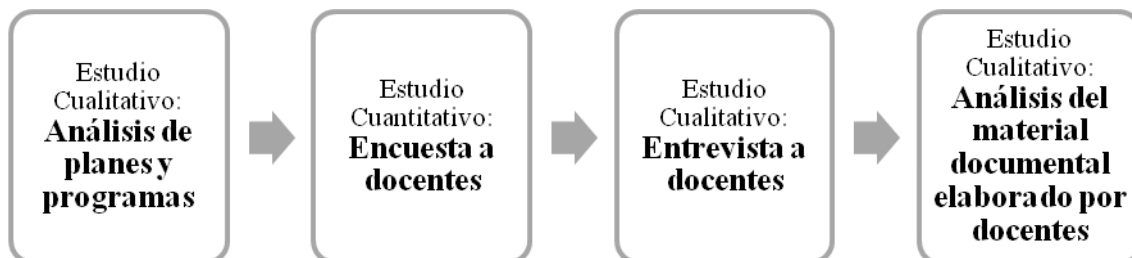
Cuadro 4: Proceso de validación entre métodos



3.2. De la recolección de datos

El proceso de obtención y análisis de datos se llevó a cabo en cuatro etapas. Por un lado se recolectaron datos documentales, tarea que implicó un abordaje de la literatura existente. El estudio de planes y programas vigentes permitió establecer el perfil de los docentes con los cuales trabajar. Con ellos se dio comienzo a la recolección de fuentes primarias mediante la aplicación de una encuesta. De allí se procedió a una segunda instancia de selección de docentes con los que se trabajó en base a entrevistas. Este último momento permitió la recolección de materiales documentales elaborados por los propios docentes.

Cuadro 5: Etapas de la recolección de datos



3.3. De los datos documentados

La búsqueda, selección y análisis de materiales documentados fue una de las estrategias metodológicas tenidas en cuenta durante el proceso de esta investigación. Es así que se efectuó una completa y exhaustiva revisión de los materiales bibliográficos correspondientes a la temática abordada.

Se procedió a la exploración, clasificación y revisión de la literatura basada en la documentación existente. Con el fin de estudiar todo tipo de archivos que dieran cuenta de los propósitos e intereses de los docentes al momento de seleccionar las estrategias de enseñanza aplicadas a sus clases de Geometría se realizó un sondeo, recolectando y analizando este tipo de fuentes secundarias, tales como programas del plan 2006 propuestos por el Consejo de Educación Secundaria (CES) y sus respectivas reformulaciones.

La palabra documento, en su etimología, proveniente del latín: *documentum*, significa enseñar, instruirse. Según la Real Academia Española, por documento se hace referencia a todo “Escrito en que constan datos fidedignos o susceptibles de ser empleados como tales para probar algo” (RAE, 1992; 771).

Por su parte MacDonald y Tipton (1993) definen este vocablo de modo más amplio al expresar que “Los documentos son cosas que podemos leer y que se refieren a algún aspecto del mundo social. Claramente esto incluye aquellas cosas hechas con la intención de registrar el mundo social... pero también los registros privados y personales... los cuales

puede que no se hayan hecho para sacarlos a la luz” (MacDonald y Tipton, 1993, en Valles, 2007; 120).

Estos datos, no son datos recolectados exclusivamente por quien investiga mediante la aplicación de una o varias técnicas de investigación, sino que por el contrario, las fuentes secundarias son datos que pertenecientes al ámbito tanto público como privado, no fueron creados con fines investigativos pero sin embargo dan cuenta de la realidad que se desea analizar.

Moliner (1984, en Valles, 2007) establece una distinción de los documentos en tres categorías: testimonios escritos que dan cuenta de épocas pasadas, escritos que permiten certificar algo y escritos que ilustran o enseñan una disciplina.

En el presente trabajo se adoptó la tercera categoría especificada por Moliner (1984), y se optó por el estudio de documentos programáticos propuestos por el Consejo de Educación Secundaria (CES), que dieran cuenta de los contenidos abordados en cada uno de los diferentes cursos de Bachillerato. Se seleccionaron únicamente aquellos cursos que indicaran la enseñanza de contenidos geométricos (ver anexo 2).

En una segunda instancia de análisis documental, se procedió a estudiar los planes anuales elaborados por los docentes de estos cursos. Culminada esta etapa se efectuó un análisis comparativo entre los programas de Bachillerato propuestos por el CES y los planes anuales elaborados por los docentes.

Las conclusiones arribadas de esta comparación son tenidas en cuenta durante el proceso de triangulación de datos llevado a cabo posteriormente. Esta instancia de triangulación teórica se caracterizó por el cruzamiento de datos sobresalientes únicamente de la información documental recabada.

3.4. De las encuestas

Desde el punto de vista cuantitativo, un instrumento de medición o de recolección de datos juega un papel central en la investigación al permitir capturar la realidad de aquel fenómeno que desea observarse.

El instrumento cuantitativo de recolección de datos empleado en esta investigación correspondió a un censo. Por las características de la población que se pretendía estudiar se buscó incluir todos los sujetos del universo de análisis aplicando un cuestionario auto-administrado (se entregó el cuestionario directamente a los profesores y fueron ellos quienes lo respondieron) con preguntas que permitieron captar con la mayor fidelidad posible las características de las variables que se deseaba medir.

Cea D’Ancona (1998) define la encuesta como *“la aplicación de un procedimiento estandarizado para recabar información (oral o escrita) de una muestra amplia de sujetos”* (Cea D’Ancona, 1998; 240).

Dadas las características propias de las encuestas, mediante esta técnica de recolección de datos, se pretendió recabar información tanto de hechos como de opiniones de los docentes que de ella participaron.

La información recabada en forma estructurada fue agrupada y cuantificada, atendiendo sobre todo aquellas respuestas más estandarizadas (fiabilidad), para establecer dicotomías y relaciones entre las respuestas emitidas con el fin de construir categorías e indicadores. El análisis de estos datos permitió la extracción de conclusiones, las que posteriormente sirvieron de insumos para la redacción de las entrevistas.

El cuestionario propuesto involucró una serie de preguntas que atendieron el propósito de este trabajo de investigación: dar cuenta de las principales metodologías empleadas por los docentes de Matemática al momento de pensar sus clases de Bachillerato. En particular estudiar la valoración que estos docentes le asignan al trabajo con recursos didácticos, especialmente para la enseñanza de argumentaciones y demostraciones geométricas.

El trabajo de campo se realizó en liceos públicos de una ciudad del interior del país que cuenta con cursos completos de Bachillerato. Por tal motivo se trabajó con el total de docentes de Matemática que dictan clases en estos cursos y cuyos programas incluyen unidades que involucran conceptos geométricos (ver Anexo 2).

La encuesta aplicada a estos docentes fue semi estructurada ya que contenía preguntas abiertas y cerradas.

Las preguntas cerradas presentaron dos tipos de categorías de respuesta. Por un lado se incluían varias opciones de respuesta a las que el encuestado debía ajustarse, como: Si, No, A veces, entre otras. También se incluyó en este cuestionario preguntas donde los docentes debieron seleccionar más de una respuesta jerarquizando sus elecciones de acuerdo con los ítems dados. En ambos casos, las opciones brindadas a los encuestados fueron pensadas *a priori* donde se procuró abarcar todo el abanico de posibles respuestas.

En el cuestionario suministrado, se incluyeron preguntas que apuntaban a recabar datos referidos a características personales de los encuestados como sexo, antigüedad en el sistema, carácter del cargo, cursos en los cuales dicta clases de Matemática, tipo de recursos didácticos empleados en sus clase; donde se brindaban alternativas delimitando las posibilidades de respuestas (ver anexo 3).

En cambio las preguntas abiertas trataron de brindar libertad en las respuestas dadas por los docentes. Con ellas se procuró recabar información que profundizara en los ítems señalados con anterioridad y obtener una visión más general de, por ejemplo, los argumentos empleados por ellos al momento de seleccionar una u otra metodología de enseñanza.

Si bien las preguntas abiertas permitieron ahondar en determinadas cuestiones tales como el por qué emplear o no recursos didácticos en el aula o las metodologías de trabajo consideradas más adecuadas para que el estudiante aprenda a argumentar o a demostrar, éstas fueron más difíciles de categorizar y codificar. Por su parte las preguntas cerradas presentaron mayor facilidad en el proceso de preparación para su análisis por ejemplo mediante la categorización del carácter del cargo (efectivo, interino, suplente) o el sexo (femenino, masculino).

Luego de diseñada, se procedió al testeo de la encuesta con la finalidad de comprobar la claridad, pertinencia, comprensión de las preguntas. Esta instancia fue realizada con 5 docentes que dictan clases de Matemática en Formación Docente y se encuentran en servicio, pero que no participarían del trabajo de campo de esta investigación por no presentar las características de la población seleccionada (no dictar cursos en las instituciones en las que se llevó a cabo el trabajo de campo).

Si bien no hubo objeciones en cuanto a que los datos recabados durante el testeo coincidiera con lo que se deseaba investigar, se trató de atender algunas sugerencias realizadas por estos docentes. Es así que una vez culminado el proceso de testeo, se procedió a realizar los ajustes necesarios para que las preguntas propuestas no presentaran ambigüedades o indujeran en sus respuestas o incluso que no presentaran algún factor de incomodidad para el encuestado.

A partir del testeo, se consideró como posible que en los ítems dónde los docentes debían marcar más de una opción (ver anexo 3) surgieran consultas sobre la relevancia de incluir o no números que indicaran prioridad en la selección efectuada. Sin embargo cada una de las variables fueron estudiadas en forma independiente una de otra por lo que no presentó relevancia alguna la modalidad en la cual éstas eran seleccionadas.

El siguiente cuadro da cuenta de las preguntas realizadas en relación a las dimensiones y temáticas abordadas en las encuestas una vez realizados los ajustes posteriores al testeo.

Cuadro 6: Preguntas realizadas durante las encuestas en relación a las dimensiones y temáticas abordadas

	Intenciones del cuestionario	Temáticas	Subtemáticas	Cantidad de preguntas del cuestionario
Perfil profesional	¿Cuál es el perfil profesional de los profesores del Bachillerato?	Perfil docente	Formación docente Experiencia docente Actividad docente	5
Enseñanza de la Geometría	¿Cuáles son las estrategias de enseñanza mayoritariamente tenidas en cuenta por los docentes de Geometría al momento de pensar sus clases?	Prácticas de enseñanza Procesos de aprendizaje	Estrategias didácticas Abordaje de las prácticas argumentativas Enseñanza de las demostraciones	7
Recursos didácticos	¿Qué uso se le da a los recursos didácticos? ¿Cómo implementa el uso de recursos en el aula?	Concepciones relativas al enseñar y al aprender	Empleo de recursos en el aula Metodologías de trabajo con materiales didácticos	6

Fuente: Elaboración personal.

Como etapa previa al trabajo con los docentes, fue necesario acordar una cita con cada una de las direcciones de las instituciones en las que se pretendía llevar adelante el trabajo de campo. En ella se hizo entrega de una carta que informaba del trabajo de investigación que se proponía realizar y donde se explicitaban los motivos de las encuestas (ver anexo 5).

Con la debida autorización las encuestas fueron llevadas a cabo en horarios destinados a horas de coordinación institucional y en espacios propios de cada local liceal.

Para complementar la información recabada en la encuesta y luego de analizada, se procedió al empleo de estrategias de orden cualitativo, por lo que se implementaron una serie de entrevistas con el fin de favorecer la comprensión de algunas de las respuestas proporcionadas en la mencionada encuesta.

La realización de las entrevistas permitió reflejar o contrastar la información recolectada y analizada luego de la implementación de las encuestas. De este modo, se procuró establecer un acercamiento fenomenológico al objeto estudiado con el fin de comprender cómo estos docentes definen y construyen sus prácticas de enseñanza de la Geometría.

Patton (1990) expresa que situarse desde una perspectiva fenomenológica implica una doble consideración: *“Para unos, lo fundamental es centrarse en las experiencias e interpretaciones de los fenómenos, por parte de la gente que los vive; no siendo imprescindible que el investigador tenga la experiencia del fenómeno que se estudia... Para otros, en cambio, la adopción de la perspectiva fenomenológica comporta un “mandato metodológico” que exige al investigador vivir la experiencia del fenómeno estudiado”* (Patton, 1990, en Valles, 2007; 64:65).

La presente investigación se adscribe a la primera perspectiva señalada por Patton (1990, en Valles, 2007), ya que quien investiga, a pesar de no dictar clases en cursos de Bachillerato, no se encuentra ajeno a esta realidad. Esto permitió un estudio de las prácticas de enseñanza de Geometría llevadas a cabo en Bachillerato con una mirada más profunda, pero sin intención de comparar o poner en tela de juicio opiniones y/o acciones implementadas por los docentes investigados.

3.5. De las entrevistas

Mediante la entrevista, se buscó ahondar en los argumentos empleados por los docentes de Matemática de Bachillerato al momento de decidir emplear o no recursos didácticos para la enseñanza de la Geometría.

Entendida como *“técnica de obtención de información relevante para los objetivos de un estudio”* (Valles, 2007; 181), mediante las entrevistas se buscó profundizar en las percepciones, experiencias, metodologías de trabajo y creencias que los docentes tenían

acerca del abordaje de las demostraciones geométricas; en particular en el tratamiento de las prácticas argumentativas en la enseñanza de la Geometría a alumnos de estos cursos.

La selección de los docentes que participaron de las entrevistas dio comienzo durante el proceso de recolección de datos por medio de las encuestas. En cada encuesta se colocó una tirilla que debía ser entregada en sobre aparte, donde los docentes expresaban su acuerdo o no por continuar participando en esta investigación e incluían la debida información de contacto (ver anexo 4).

Esta tirilla contenía además una pregunta que atendía a los motivos por los cuales el docente comunicaba su interés en la participación de las futuras entrevistas. Del análisis y clasificación de los juicios emitidos se seleccionaron quiénes continuarían participando en el trabajo de campo de esta investigación.

En particular fueron tenidas en cuenta aquellas personas que expresaron estar interesadas en el tema que se estaba estudiando, mostraron satisfacción por participar en las diferentes etapas del trabajo de campo y manifestaron estar dispuestas a brindar toda la información solicitada por quien investiga.

Cuadro 7: Número de docentes que participaron de cada instancia del trabajo de campo

Profesores que participaron de las encuestas	24
Profesores que demostraron interés en seguir participando	14
Profesores entrevistados	8

Una vez seleccionados los docentes a entrevistar, se dio comienzo al proceso de recolección de datos mediante lo que Patton (1990, en Valles, 2007) ha dado a llamar *entrevistas basadas en un guión* (ver anexo 5).

Éstas son una variedad de entrevistas “*caracterizada por la preparación de un guión de temas a tratar (y por tener la libertad el entrevistador para ordenar y formular las preguntas, a lo largo del encuentro de entrevista)*” (Valles, 2007; 180).

Para ello fue necesario realizar el diseño del guión de entrevista y posteriormente el proceso de testeo para comprobar la claridad y pertinencia de las preguntas. En esta instancia se llevó a cabo una entrevista a un docente que dicta clases de Matemática en Secundaria, pero que no participó de ninguna de las instancias del trabajo de campo por no presentar las características de la población seleccionada (no tener a cargo este año cursos de Bachillerato cuyos programas presenten contenidos geométricos).

Culminado el proceso de testeo y realizados los ajustes correspondientes, se procedió a contactar a los docentes que sí participarían de esta etapa del proceso de investigación.

Mediante conversaciones telefónicas se acordó con cada profesor día, hora y espacio dónde tendría lugar esta técnica de conversación.

Cabe destacar que no todas las citas se llevaron adelante de acuerdo con la agenda inicial ya que por diversos motivos (situaciones específicas de cada persona), fue preciso re programar dos de las ocho entrevistas realizadas.

La recolección de datos mediante el empleo de entrevistas basadas en un guión permitió mantener una conversación con los docentes, centrada en sus experiencias personales y la libre expresión de sus ideas y opiniones.

El siguiente cuadro da cuenta de las preguntas realizadas en relación a las dimensiones y temáticas abordadas en las entrevistas una vez realizados los ajustes posteriores al testeo. En procura de realizar una profundización de los datos analizados luego de las encuestas, se atienden los mismos aspectos y dimensiones de la temática abordada.

Cuadro 8: Preguntas realizadas durante las entrevistas en relación a las dimensiones y temáticas abordadas

	Intenciones del guión de entrevista	Temáticas	Subtemáticas	Cantidad de preguntas del guión de entrevista.
Enseñanza de la Geometría	¿Cuáles son las estrategias de enseñanza mayoritariamente tenidas en cuenta por los docentes de Geometría al momento de pensar sus clases?	Prácticas de enseñanza Procesos de aprendizaje	Abordaje de las prácticas de aula Estrategias didácticas Abordaje de las prácticas argumentativas Enseñanza de las demostraciones	- A lo largo de todo el guión de entrevista se trabaja con preguntas que atienden a cuestiones referentes a las prácticas de aula y las estrategias de enseñanza. - Una pregunta específica sobre el abordaje de las prácticas argumentativas y una específica sobre la enseñanza de las demostraciones.
Recursos didácticos	¿Qué uso se le da a los recursos didácticos? ¿Cómo implementa el uso de recursos en el aula?	Concepciones relativas al enseñar y al aprender	Empleo de recursos en el aula Metodologías de trabajo con materiales didácticos	- Una pregunta específica sobre el empleo de recursos didácticos. - Disparadores a lo largo de toda la entrevista.

Fuente: Elaboración personal

3.6. Selección de las instituciones y los docentes

En toda investigación, las tareas de selección no acaban con la construcción y delimitación del problema, la elaboración del marco teórico o el abordaje metodológico. Es indispensable la toma de decisiones durante la construcción del diseño: seleccionar los contextos en los cuales trabajar, las fechas, los casos a estudiar, entre otros. Algunas decisiones debieron ser tomadas al inicio del diseño como la delimitación del problema y otras fueron tomadas a medida que se fue haciendo necesario resolver situaciones específicas (Valles, 2001), como por ejemplo las encuestas a añadir o a anular, la modificación del guión de entrevistas, entre otras.

En la ciudad donde se llevó a cabo el trabajo de campo de la presente investigación, existen solamente tres liceos que cuentan con primer, segundo y tercer año de Bachillerato. A ellos concurren estudiantes de los distintos barrios y contextos de esta ciudad. El trabajo de campo fue realizado solamente en dos de esas tres instituciones, con el propósito de atender los criterios de validez y fiabilidad (para la investigación cuantitativa) y los criterios de calidad (para la investigación cualitativa) necesarios en todo proceso de investigación (Valles, 2007). Quien investiga, desempeña su labor como docente en uno de los liceos en cuestión, por lo que, a pesar de dictar clases en cursos de Ciclo Básico, procurando el mayor distanciamiento posible con el fin de evitar cualquier tipo de sesgo, se consideró pertinente no tomar en cuenta para el proceso de recolección de información este centro educativo.

En las dos instituciones restantes, se procedió a aplicar una encuesta a la totalidad de docentes de Matemática que en ese momento se encontraban dictando cursos de Bachillerato, plan 2006 y cuyos programas presentaban unidades que incluían contenidos de Geometría (ver anexo 2).

Con el propósito de mantener el debido anonimato de las instituciones y por ser una investigación acerca del abordaje metodológico de la enseñanza de la Geometría se procedió a denominar ambas instituciones bajo nombres de figuras geométricas: Liceo Esfera y Liceo Poliedro.

Cuadro 9: Principales características de los liceos seleccionados para la realización del trabajo de campo

<p>Liceo Esfera</p>	<p>Liceo céntrico que cuenta con grupos de Bachillerato desde su momento de fundación.</p> <p>A partir del año 1998 pasa a ser un liceo exclusivo de Segundo Ciclo. Cuenta con todas las opciones del plan vigente para Bachillerato.</p> <p>Esta institución recibe alumnos provenientes de liceos de distintos barrios y contextos de la ciudad e interior del Departamento.</p> <p>Por ser un liceo céntrico dispone de todas las líneas de traslado urbano, servicios próximos de salud públicos y privados.</p> <p>Cuenta con 62 grupos de Bachillerato que se distribuyen en tres turnos:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Matutino: donde se encuentran cursos de primer y segundo año de Bachillerato. • Vespertino: donde se dictan los cursos de tercer año de Bachillerato. • Nocturno: cuenta con cursos para adultos de primer, segundo y tercer año de Bachillerato. <p>Actualmente cuenta con un director, dos subdirectores, un secretario, 5 administrativos, 10 adscriptos, 196 docentes, 8 funcionarios de servicio y 2191 alumnos.</p>
<p>Liceo Poliedro</p>	<p>Situado en uno de los principales barrios de la ciudad, esta institución cuenta con grupos de Bachillerato desde 1974, aunque no presenta todas las opciones del plan vigente.</p> <p>Cuenta con 45 grupos de Bachillerato que se distribuyen en tres turnos:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Matutino e intermedio: donde se encuentran cursos de Ciclo Básico y primer año de Bachillerato. • Vespertino: donde se dictan cursos de segundo y tercer año de Bachillerato. <p>Recibe una población estudiantil proveniente principalmente de contextos socioeconómicos medio y medio bajo.</p>

	<p>Actualmente cuenta con un director, dos subdirectores, un secretario, un administrativo, diez adscriptos, 152 docentes (53% aproximadamente de Bachillerato), 6 funcionarios de servicio y 1441 alumnos (39% aproximadamente en Bachillerato).</p> <p>Por ser un liceo de barrio no cuenta con la totalidad de las líneas de traslado.</p> <p>Esta institución dispone de un servicio asistencial, una UBA (Unidad Básica Asistencial) integrada por un equipo multidisciplinario de trabajo.</p>
--	--

Fuente: Elaboración personal.

Cabe recordar que esta investigación se trata de un estudio no experimental. Estudios que, al decir de Hernández Sampieri (1997), “*se realizan sin la manipulación deliberada de la variable y en los que se observan los fenómenos en su ambiente natural para después analizarlos*” (Hernández Sampieri et al, 1997; 269).

Por tal motivo para la selección de los docentes que participaron de las entrevistas llevadas a cabo posteriormente se tuvo en cuenta aquellos docentes que expresaron voluntario consentimiento en la participación del trabajo de investigación.

3.7. Sobre el trabajo de campo

En forma previa a la aplicación de las entrevistas se mantuvo una reunión con las direcciones de las instituciones donde se llevarían a cabo las encuestas. En estas reuniones, se acordó día y horario de reunión con los docentes.

La entrada a una de las instituciones (Liceo Poliedro) no presentó dificultad alguna. Se asistió en el horario convenido a una hora de coordinación general de docentes de Bachillerato, donde se encontraban presentes todos los profesores con los que era necesario trabajar. El subdirector de dicha institución hizo las presentaciones correspondientes solicitando a los

docentes de Matemática de Bachillerato de primer año, de segundo año del núcleo común y de tercer año: Matemática II (Opción Físico-Matemática), Matemática I (Opción Matemática y Diseño) y Matemática IV (Opción Matemática y Diseño) que se dirigieran a un salón que previamente había sido designado para este trabajo (ver anexo 2).

Allí, quien investiga, procedió a explicar la finalidad de la investigación y que el rol de quien lo hace no era evaluar ni dar juicios de opinión sino que se pretendía recabar y analizar datos que dieran cuenta de las principales estrategias tenidas en cuenta por los docentes de Matemática al momento de seleccionar las metodologías de enseñanza de la Geometría, en particular estudiar el tratamiento de las argumentaciones y demostraciones de contenidos geométricos.

En todo el proceso se agradeció a los profesores por su amable y significativa colaboración. Se enfatizó en que se mantendría el anonimato de quienes participaban por lo que era de suma importancia la honestidad en las respuestas dadas.

Una vez evacuadas las dudas de quienes participarían de esta etapa del trabajo de campo, se procedió a entregar un sobre a cada encuestado. Éste contenía un sobre más pequeño y la encuesta. Al final de la encuesta se encontraba una tirilla que debía ser recortada por los docentes y colocada en el sobre extra (ver anexo 4). Como ya se indicó, dicha tirilla expresaba el consentimiento o no de continuar participando en posteriores etapas de esta investigación y recababa los datos necesarios para poder mantener contacto con quienes fueran seleccionados. Ambos sobres, el grande que contenía la encuesta y el pequeño que contenía la tirilla, se entregan por separado con la finalidad de mantener el anonimato de los participantes.

Quien investiga estuvo presente durante el proceso de aplicación de las encuestas. De este modo fue posible atender consultas planteadas como por ejemplo: cuando debían señalar dos opciones si marcaban con una cruz o con números que indicaran prioridad en la respuesta.

Finalizada esta etapa se procedió a agradecer a los encuestados por su valiosa participación y al cuerpo directivo por el espacio cedido para la realización de esta tarea recordando que el trabajo de campo no finalizaba en esta instancia y que podría ser necesario continuar trabajando en la institución en etapas posteriores.

Para el trabajo en la segunda institución (Liceo Esfera) se procedió de igual manera que en el Liceo Poliedro. Se acordó con la dirección del local liceal un día y horario y al igual que en el caso anterior, correspondiente a la coordinación general, espacio donde se encuentran reunidos semanalmente todos los docentes de un mismo ciclo para tratar temas institucionales y/o temas del quehacer de la labor docente.

Sin embargo la entrada no fue tarea fácil. Al llegar a la institución de acuerdo con lo agendado, los docentes se encontraban dispersos por todo el local. Fue necesario reunirlos en pequeños grupos, explicar los fines de la presente investigación, atender dudas y aplicar la encuesta en varias oportunidades.

Fue necesario asistir a esta institución en tres momentos más. El primero para volver a sostener una reunión con la dirección para que autorizara nuevamente la entrada al local y las otras dos para reunir los docentes que aún faltaban encuestar. A pesar de las reiteradas asistencias a este Liceo, cada grupo de docentes con el que se trabajó, no parecía estar al tanto del por qué de la convocatoria, siendo necesario explicar y atender consultas en cada instancia.

En síntesis, de un total de 26 docentes fue posible encuestar 24. Uno de ellos se encontraba con licencia médica y el otro (docente del Liceo Esfera) no accedió a participar de las encuestas.

4. Análisis de datos

“La posibilidad de construir un nuevo significado, ... pasa necesariamente por la posibilidad de ‘entrar en contacto’ con el nuevo conocimiento” (Coll et al, 1999; 50).

4.1. Análisis de los datos recabados por la encuesta

Mediante las encuestas se buscó obtener una imagen general de las características de quienes actualmente se encuentran dictando cursos de Bachillerato y cuyos programas presentan unidades correspondientes a contenidos geométricos.

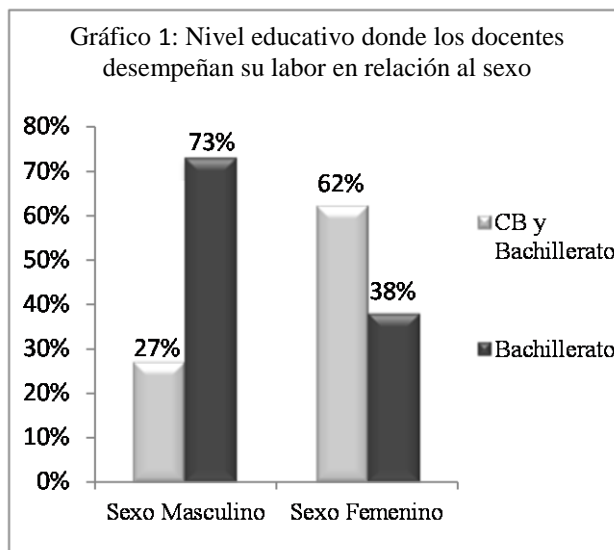
Con ello se procuró contextualizar la realidad de docentes, recabando datos que dieran cuenta de las principales cuestiones tenidas en cuenta al momento de seleccionar las metodologías de abordaje de la Geometría en Bachillerato.

De este modo, se pretendió atender variables que representaran las características más sobresalientes tanto de la población con la cual se llevó a cabo el trabajo de campo así como también aquellos factores que pudieran influir en la validez interna de los resultados y que debieran atenderse durante el proceso de extracción de conclusiones.

Se consideró como punto de partida que el trabajo de campo llevado a cabo atendió a una situación real, donde se manejaron variables propias del entorno natural de los docentes.

Hernández Sampieri (1997) considera que es deseable que el investigador atienda la validez externa, haciendo referencia al *“qué tan generalizables son los resultados de un experimento a situaciones no experimentables y a otros sujetos o poblaciones”* (Hernández Sampieri, 1997; 251).

De los datos cuantitativos recabados se obtuvieron resultados de carácter general como el sexo, la antigüedad, el carácter del cargo y otros más específicos como las cuestiones tenidas en cuenta por los docentes al momento de pensar la clase así como también el tipo de recursos que utilizan.

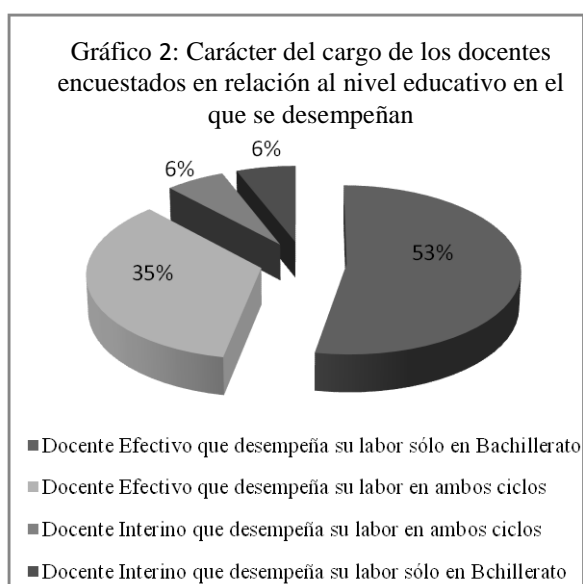


En el estudio realizado fue posible constatar que entre los docentes del sexo masculino hay una tendencia (73% aproximadamente) a trabajar solamente en cursos de Bachillerato, mientras que en los del sexo femenino esta relación disminuye notoriamente (38%). Mientras que 6 de cada 10 profesores del sexo femenino optan por trabajar en ambos ciclos de educación secundaria, es notablemente menor esta relación en el cuerpo docente

masculino (solo 3 de cada 10 desempeñan su labor en ambos ciclos).

El 83% de los encuestados son efectivos en el cargo y casi 6 de cada 10 de ellos se encuentran dictando clases únicamente en segundo ciclo. El 17% restante presenta cargo de carácter interino o suplente y dictan clases en ambos niveles de educación secundaria.

El gráfico adjunto muestra la relación de estos profesores en función del carácter de su cargo y los niveles donde desempeñan de su labor.



El 12% aproximadamente de los encuestados presentan horas interinas o suplentes en el cargo y trabajan tanto en grupos de Ciclo Básico como de Bachillerato.

De la porción restante es posible observar que casi un 53% de estos docentes dictan clases solamente en

cursos de Bachillerato mientras que un 35% lo hace en los distintos niveles de Educación Secundaria indistintamente.

De ellos, se constata que el 35% se caracterizan por presentar una antigüedad menor a los 10 años de trabajo y en un 60% de estos casos desempeñan su labor en ambos niveles educativos.

Al preguntar acerca de las cuestiones tenidas en cuenta al momento de trabajar un contenido geométrico, el 50% de los encuestados tiende a dar respuestas que parecerían estar basadas en el deber ser de la labor docente.

Entre los datos recabados se constató que en sus discursos, estos docentes hacen referencia a la relevancia de atender conocimientos previos de los alumnos, los contenidos programáticos, las características del grupo, entre otras (ver cuadro 10).

Dentro de las cuestiones que son atendidas al trabajar un contenido geométrico, un 42% de quienes participaron de esta instancia expresaron tener en cuenta recursos didácticos al momento de enseñar esta asignatura.

Solamente un 25% de ellos hace referencia a procesos de aprendizaje propiamente específicos de la Geometría atendiendo cuestiones tales como: la ubicación en el plano, la visualización de conceptos geométricos, entre otras.

Cuadro 10: Cuestiones tenidas en cuenta por los docentes de Matemática al momento de trabajar un contenido geométrico

Respuestas no específicas a la Geometría	Dificultades de los alumnos por experiencias anteriores	4,2%
	Conocimientos previos / Contenidos programáticos	75%
	Características del grupo	29%
	Motivación	8,3%
	Tiempo disponible	4,2%
	Estrategias de enseñanza (Resolución de problemas)	8,3%
Respuestas específicas a la Geometría	Recursos didácticos específicos	42%
	Ubicación espacial	4,2%
	Ubicación en el plano	8,3%
	Visualización de conceptos	12,5%

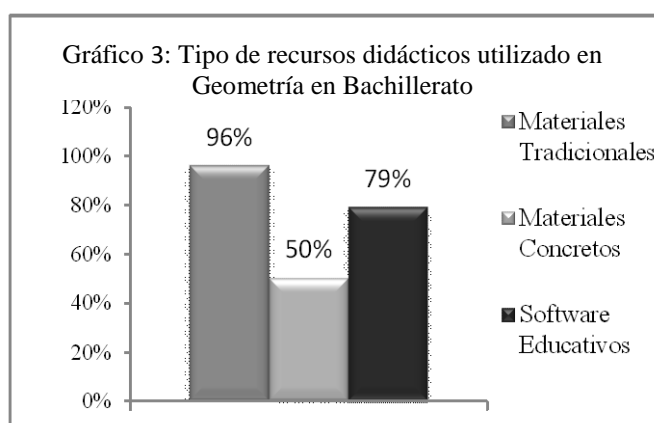
Fuente: Elaboración personal.

Al indagar acerca de los momentos en que son atendidas cuestiones referentes al trabajo con contenidos geométricos un 67% aproximadamente de los entrevistados hace referencia al trabajo llevado a cabo durante el tiempo de aula. Solamente un 37,5% de ellos expresaron pensar en estas cuestiones tanto en instancias de planificación de la unidad de Geometría como de planificación diaria.

Al consultarlos sobre la existencia de normas institucionales que influyeran en las decisiones tomadas al momento de planificar, ninguno de los casos con los que se llevó a cabo el trabajo de campo indicó pautas estipuladas que indicaran cómo trabajar en el aula. De este análisis surge la duda de si existen normas establecidas por la Inspección de Matemática que sí condicionen la toma de decisiones y lleven a los docentes a atender una modalidad específica de abordaje de los contenidos geométricos.

Del análisis de las respuestas señaladas en el cuadro del ítem 9, donde se solicitaba a los docentes que se indicaran el uso que le daban a diferentes recursos didácticos (Materiales tradicionales, Materiales concretos, Software educativos, Otros), es posible concluir que independientemente de la antigüedad, los docentes de Bachillerato investigados hacen uso de una gran variedad de recursos didácticos en el aula.

Los recursos mayoritariamente empleados son los tradicionales (juego de Geometría, calculadora) con casi el 96% de los docentes que afirman tenerlos en cuenta al momento de trabajar en el aula. Mientras que sólo 5 de cada 10 encuestados afirman emplear



materiales concretos en la enseñanza de contenidos geométricos, casi un 80% de ellos aseguran trabajar con software educativos. Este dato podría conducir a preguntarse si los profesores de Matemática que actualmente dictan cursos de Geometría en Bachillerato se han actualizado en lo relativo a la inclusión de tecnologías y si esta actualización se da o no de forma independiente de la antigüedad de los docentes en el sistema.

Del estudio realizado es posible constatar que en mayor o menor medida, todos los profesores de Bachillerato expresaron tener en cuenta al menos algún tipo de recurso al momento de planificar sus clases de Geometría. Un importante porcentaje de ellos (aproximadamente el 63%) aseguran emplear alguno de estos recursos didácticos principalmente cuando desean introducir un concepto, mientras que sólo un 8% aproximadamente señala utilizarlos a modo de consolidar contenidos trabajados durante las unidades de Geometría.

Cuadro 11: Razones expresadas por los docentes del por qué sí tener en cuenta recursos didácticos al trabajar contenidos geométricos en el aula

Su empleo facilita la construcción de conceptos	50%
Los alumnos se sienten más motivados	37,5%
Favorece la visualización	83%
Favorece la abstracción	20,8%

Fuente: Elaboración personal.

En el cuadro 11 es posible observar las razones mayoritariamente recabadas del por qué sí emplear recursos didácticos en el aula para la enseñanza de la Geometría.

En el desarrollo del concepto de visualización en el marco teórico, se expresó que este corresponde al saber ver, consiste en observar y retener imágenes que permitan reconocer las mismas características y propiedades de entre una variedad de objetos. Del análisis del cuadro se desprende que el 83% de los encuestados consideran que el empleo de este tipo de recursos favorece en los alumnos el proceso de visualización, por lo que surge la duda de si quienes respondieron a esta cuestión lo hacen teniendo en cuenta el sentido con el que se presentó este concepto en el marco teórico.

Otras de las razones dadas del por qué utilizar recursos didácticos en el aula corresponde a que su empleo facilita la construcción de conceptos (50%). De estas respuestas se presenta la duda de si los docentes utilizan este tipo de recursos con el fin de favorecer el proceso de aprendizaje del alumno o de facilitar el proceso de enseñanza de los conceptos geométricos.

De los encuestados que señalan no utilizar alguno de los recursos mencionados, un 12,5% considera que, por ejemplo, prefiere no trabajar con materiales concretos por no ser de fácil traslado, porque los alumnos no los llevan o porque el trabajar con software educativos es más productivo. Lo que genera interrogantes como: ¿productivo para quién? ¿Favorece los procesos de enseñanza o de aprendizaje?

Solamente un 4% de esta población expresó no trabajar con materiales concretos o con software educativos porque se pierde mucho tiempo. En este sentido cabe preguntarse a qué

tiempo hacen referencia estos profesores de Bachillerato: tiempo de enseñanza o tiempo de aprendizaje.

De acuerdo con las respuestas obtenidas con respecto a las actividades más frecuentes que realizan los alumnos en el aula en Bachillerato cuando se enseña Geometría, un 71% aproximadamente de los encuestados propone actividades de enseñanza de conceptos geométricos basadas en la resolución de problemas. Podría desprenderse una intención docente de centrar los procesos de construcción de conocimientos en los alumnos, tema que necesitaría ser abordado en instancias posteriores de este trabajo.

Mientras que en el 58% aproximadamente de las aulas se trabaja mediante la discusión de propuestas principalmente en pequeños grupos, de la lectura de este apartado se desprende que más de 4 de cada 10 docentes planifican propuestas de aula donde los estudiantes trabajan en forma individual.

En casi 3 de cada 10 aulas los alumnos trabajan básicamente atendiendo a cuestiones que quien enseña plantea casi que en un diálogo bi-direccional (el profesor formula preguntas que el alumno responde). Y casi en una misma relación (25%) los alumnos se muestran interesados por las propuestas realizando preguntas que, en un 4% de los casos, son respondidas por sus pares.

Del análisis de estos datos cabe preguntarse si la preferencia por una u otra metodología de enseñanza tiene raíces en variables cuantitativas como la antigüedad o el nivel educativo donde el docente desempeña su labor.

Al preguntar cómo ha sido implementado el uso de los recursos didácticos en las clases de Geometría, se constata que el 50% de los estudiantes trabajan en pequeños grupos compartiendo materiales y discutiendo la consigna propuesta.

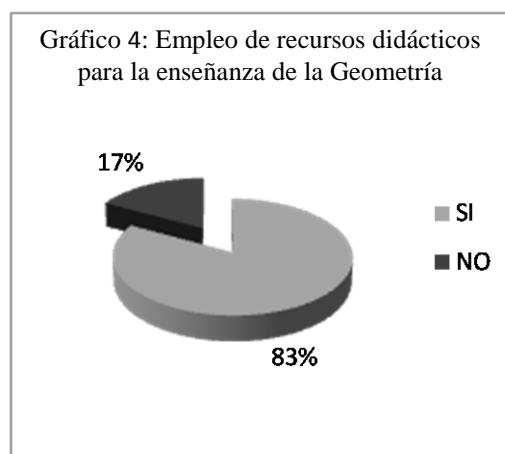
Esta respuesta se muestra coherente con los datos obtenidos en el ítem anterior donde en el 58% de los casos, los docentes dicen proponer actividades a resolver y discutir en pequeños grupos.

Del estudio efectuado también se desprende que en 1 de cada 4 aulas se lleva sólo un modelo y se comparte, discutiendo soluciones en forma general.

Son muy pocos los casos donde cada alumno trabaja con un modelo (aproximadamente un 8%) y menor aún los casos donde los docentes dicen no emplear recursos por las difíciles características del grupo (4%).

Al preguntar por los recursos didácticos más utilizados en el aula al enseñar conceptos geométricos, se concluyó que en el 80% de los casos se utilizan software educativos por lo que surge la duda relativa a las modalidades de abordaje con este tipo de recursos: ¿es el docente que trabaja con el software o son los alumnos?, ¿cómo se implementa su uso?, ¿cómo se construyen los conocimientos?, ¿cómo se llevan a cabo los procesos de enseñanza?, ¿y los de aprendizaje?

En cuanto a la relevancia o no del emplear recursos didácticos en el aula de Bachillerato más del 80% de los encuestados consideran que es importante ya que permite un favorable desarrollo tanto de los procesos de enseñanza como los de aprendizaje. Un 25% de ellos expresó que la motivación es importante para la construcción de conceptos “*aún los adultos*” (docente 11).



Casi el 46% de estos profesores consideran que el empleo tanto de software educativos como de materiales concretos favorece el proceso de visualización estableciendo que “*ayuda a la visualización de propiedades que a lápiz y papel no pueden observar*” (docente 2).

En un 17% de los casos se expresaron desacuerdos en cuanto al empleo de recursos didácticos indicando que los tiempos curriculares y la falta de recursos no permiten su uso. En particular un 4% de los encuestados opinan que un abuso en el empleo de estos recursos puede obstaculizar la capacidad de abstracción, en especial en niveles más avanzados de educación.

Un 8% de esta población que afirma trabajar con recursos didácticos establecen que su empleo facilita la generalización de propiedades. Se consideró este un dato en el cual profundizar en etapas posteriores del trabajo de campo de esta investigación; en particular cómo los docentes llevaban a cabo los procesos de generalización y por ende cómo eran abordadas las prácticas de argumentación y demostración.

Cuando se preguntó por la metodología de trabajo considerada más adecuada para que los alumnos de Bachillerato aprendan a demostrar geoméricamente, solamente el 4% aproximadamente atiende consideraciones específicas de la Geometría. A pesar de no hacer referencia al proceso planteado, se indican cuestiones como: relevancia en trabajar con construcciones y trazados geoméricos y explicaciones de programas de construcción.

El resto de las respuestas dadas atienden mayoritariamente a características que no son específicas de la Geometría como lo son el trabajo en pequeños grupos (33% aproximadamente), mediante la resolución de problemas (casi un 21%) o el empleo de recursos didácticos (8%).

Un 37,5% considera relevante realizar actividades que obliguen a los estudiantes a explicar sus razonamientos y a discutir fundamentadamente con sus pares. De los discursos analizados surgen expresiones como: “...Insisto que lo hagan, usando sus términos, sus palabras y que escriban lo que piensan” (docente16) o como “...crear en ellos [refiriéndose a los alumnos] la necesidad de discusión” (docente 7).

De las respuestas obtenidas, uno de los datos un tanto preocupante refiere a que casi un 13% de los docentes se muestra muy pesimista alegando que los alumnos no saben argumentar y que no es posible trabajarlo en el aula como se desearía ya que por las carencias de conocimientos (que arrastran desde cursos anteriores), los bajos niveles de rendimiento y el poco tiempo de clase, no se hace posible atender los contenidos programáticos de este y otros cursos mientras se enseña a argumentar. Se presentan comentarios como: “...Los alumnos tienen carencias conceptuales que dificultan el trabajo. En Bachillerato se tiene que atender demasiados emergentes que deben ser tratados en Ciclo Básico. Si no fuese así se podría profundizar en la argumentación geométrica” (docente 23).

El 50% de los encuestados expresa que ya sea a través de trabajos en pequeños grupos o todos juntos guiados por quien enseña, es necesario proponer actividades que obliguen al estudiante a explorar, construir, escribir, discutir y argumentar desde lo disciplinar.

Un 13% aproximadamente considera que la mejor modalidad de enseñar a realizar demostraciones en Bachillerato es mediante la resolución de problemas, aunque no hacen explícitos los mecanismos de abordaje de estas actividades.

El resto de los docentes presentan opiniones muy variadas. Un 8% considera que los tiempos programáticos no son suficientes para lograr este aprendizaje y responsabilizan al trabajo realizado en Ciclo Básico por las carencias de herramientas necesarias para que los alumnos lleven a cabo procesos de demostraciones en Geometría.

Un porcentaje importante (29%) no responde este ítem o dan respuestas como: hay que observar, practicar mucho, hay que redactar y aprender símbolos o trabajar con modelos.

De este 29% de profesores es posible constatar que el 57% son egresados de alguno de los institutos de formación docente pero con una antigüedad menor a los 6 años de trabajo. Mientras que el 43% restante son no egresados, efectivos por concurso y se encuentran en séptimo grado del escalafón docente o se encuentran cursando su primer año de trabajo en carácter de estudiante avanzado.

En síntesis:

- Del análisis de las encuestas realizadas a los docentes de Geometría, se desprende que en sus aulas se trabaja con una gran variedad de estrategias de enseñanza y se emplean una gran diversidad de recursos tales como: el trabajo en pequeños grupos, la interrogación, recursos didácticos, entre otros.
- Los tiempos curriculares y más aún los tiempos de aula parecerían ser un importante condicionante para la selección de los recursos a utilizar para la enseñanza de contenidos geométricos.
- Al indagar acerca de las cuestiones tenidas en cuenta por los profesores de Geometría al momento de trabajar un contenido geométrico se encontró que la mayoría ellos tiende a responder con argumentos del deber ser y hacer, propios de la labor docente.
- En los discursos fue posible constatar que al momento de abordar contenidos de las unidades de Geometría, los docentes de Bachillerato tienen en cuenta recursos didácticos de variada naturaleza. Casi en el 100% de las aulas se trabaja con materiales tradicionales como juegos de Geometría o calculadoras y en el 50% de los casos con materiales concretos (cajas, sorbitos, pelotas, lanas, clips). En cuanto al empleo de software educativos es posible

observar que casi en el 80% de las aulas se piensan actividades de enseñanza que impliquen el uso de las nuevas tecnologías educativas.

- En cuanto a las metodologías de trabajo para la enseñanza de las argumentaciones y demostraciones geométricas en Bachillerato ellas son muy variadas. El 50% de los profesores establecen la relevancia de proponer actividades en el aula que lleven al alumno a explorar, experimentar, visualizar, discutir con sus pares, escribir ideas y argumentar. Para lo que el trabajo en pequeños grupos o mediante la resolución de situaciones problemas parecería ser una modalidad mayoritariamente tenida en cuenta por esta población.
- Del estudio efectuado surgen dudas que refieren a las formas de implementar los recursos didácticos en las aulas de Bachillerato, en particular cómo son diseñadas las clases en las que se utilizan software educativos como estrategias de enseñanza: ¿es el docente que trabaja con el software o son los alumnos?, ¿cómo se implementa su uso?, ¿cómo se construyen los conocimientos?, ¿cómo se llevan a cabo los procesos de enseñanza?, ¿y los de aprendizaje?
- Con los datos recabados desde la encuesta no fue posible analizar los principales momentos en los cuales los docentes de Bachillerato emplean recursos didácticos para la enseñanza de conceptos geométricos: ¿lo hacen para introducir un tema?, ¿para consolidar? ¿en qué momento de la unidad utilizan este tipo de estrategias?

4.2. Análisis del material documental producido por los docentes de Bachillerato

Mediante el estudio de los planes anuales elaborados por los docentes se pretendió analizar sus intenciones de trabajo a lo largo del año y contrastarlas con las opiniones obtenidas durante el período de entrevistas. Este estudio buscó lograr un mayor entendimiento de las acciones expresadas por este grupo de docentes al momento de enseñar Geometría en Bachillerato durante el año lectivo.

Del estudio del material documental de los profesores investigados, fue posible reconocer un listado de contenidos con los tiempos que serían destinados a cada unidad.

En esta instancia, no se pudo comprender las intenciones sobre sus metodologías de trabajo a lo largo del año ya que en estos documentos no se presentaban detalles sobre las acciones a realizar.

Del cruzamiento de datos obtenidos mediante el análisis de las entrevistas y los elementos resultantes del estudio de este material documental surgió la duda de si estos docentes planifican atendiendo el qué y el cómo enseñar Geometría. Y en tal caso ¿dónde se encuentran plasmadas tales intenciones?

Durante el análisis de las entrevistas efectuadas a docentes de Bachillerato, fue posible encontrar expresiones como: “... *problemas para completar el programa, “no da el año”, los tiempos curriculares no son suficientes. “O me centro en el programa o los dejo que piensen y construyan (E1)”*”.

Si bien en los planes anuales se hace referencia a los tiempos que serán empleados para el tratamiento de cada unidad, estos tiempos son generalmente los sugeridos por los programas propuestos por el CES.

En algunos planes se encuentran detallados los recursos didácticos a utilizar en el aula o se presentan posibles metodologías de trabajo como prácticos con secuencias de contenidos, actividades grupales, entre otras. Sin embargo, en ningún momento de este material documental se hace alusión alguna a las estrategias a implementar para la enseñanza de la Geometría u otras ramas de la Matemática, lo que lleva a preguntarse cuál es el espacio, si es que existe, donde figuran tales fines.

Tampoco son explicitadas las intenciones de estos docentes de cómo son pensadas las clases, si desde los aprendizajes o desde la enseñanza o cuál es la metodología considerada más propicia para lograr los objetivos plasmados en dichos documentos.

Del análisis de las entrevistas, quienes enseñan expresan atender los procesos de aprendizaje seguidos por los estudiantes a través del empleo de recursos didácticos o pensar en actividades que mantengan una cierta secuencia de contenidos atendiendo los conocimientos previos de los estudiantes. Sin embargo, en los planes anuales estudiados no aparecen cuestiones que indiquen de qué manera son considerados estos procesos o en qué momento

son atendidos los conocimientos adquiridos previamente por los alumnos al momento de planificar los diferentes cursos.

Sería posible preguntarse si los planes anuales son vistos por estos docentes como un proceso de reflexión y un espacio donde dar cuenta de sus propósitos de enseñanza a lo largo del año o si estos documentos son vistos como un requisito con el que se ha de cumplir.

4.3. Análisis de las entrevistas

Mediante la aplicación de las entrevistas se buscó obtener una mayor aproximación a las metodologías de trabajo de los docentes de Matemática de Bachillerato en el aula, en especial las valoraciones que estos hacen acerca del empleo de recursos didácticos para la enseñanza de la Geometría. En particular permitió obtener una visión más detallada acerca del tratamiento de las argumentaciones y demostraciones geométricas en el aula.

4.3 a. Empleo de recursos en el aula

Del análisis de las entrevistas realizadas es posible observar que en general los profesores de Bachillerato, sujetos de esta investigación, buscan proponer actividades que motiven a los estudiantes, contextualizando, siempre que les sea posible, los contenidos a trabajar.

En lo referente al empleo de recursos didácticos en el aula, durante las entrevistas se consolidaron los datos extraídos de las encuestas donde cada docente adopta la metodología de trabajo que más le convence. Son muy variados los recursos empleados en las clases de Bachillerato, desde materiales tradicionales, materiales concretos o softwares; siendo los softwares educativos los recursos con mayor aceptación en estos cursos.

En cuanto al empleo de materiales tradicionales como juego de Geometría, es posible constatar que a medida que se va avanzando en cursos de Bachillerato los entrevistados optan por la elaboración de figuras de análisis mediante croquis en el pizarrón solicitando al estudiante, en general, el correcto empleo de los instrumentos de Geometría en sus cuadernos. *“... si me dan a elegir prefiero el software (P2)”. “creo que no llevé nunca los útiles de Geometría. Ellos sí, en su cuaderno (E3)”*

Ante esta situación podrían presentarse dos posturas. Por un lado, están quienes consideran que el trabajar con el juego de Geometría en el pizarrón es poco funcional y establecen preferir emplear ese tiempo recorriendo bancos y ayudando en los trazados. *“Y vos, mientras ellos estaban trabajando, ¿cuál fue tu rol ahí? (P) - Bueno, uno de los roles, utilizar la escuadra (P3)”*. Por el otro, están aquellos docentes que expresan que el estudiante ha de aprender a razonar sobre figuras de análisis para evitar que realice generalizaciones de situaciones que se cumplen solamente bajo condiciones específicas. *“siempre les muestro una figura que por ahí no está del todo proporcional y ellos en esa figura me tienen que creer, entonces la conjetura, o sea la demostración, la fundamentación es fundamental, porque ellos la mayoría no se quedan conformes con mi representación... (P2)”*. Se estaría considerando de este modo que el trabajar con figuras de análisis generaría la necesidad de probar que las afirmaciones elaboradas por los estudiantes efectivamente se cumplen.

Los docentes expresan que al trabajar en el cuaderno, ya sea mediante construcciones rigurosamente realizadas o con figuras de análisis, enfrentan la dificultad de que el alumno logre diferenciar la selección de un caso genérico y un caso particular. Establecen además que muchas veces el estudiante comete errores por pensar únicamente en el caso particular representado.

El trabajar con recursos didácticos ayuda al estudiante a comprender la importancia del pensar más allá de una situación particular y explorar qué ocurre y las diferencias que surgen cuando se piensa o se trabaja con casos genéricos. *“...antes de abstraer, antes de generalizar, es muy difícil que ellos no vean el caso particular, ellos van al caso particular (P2)”*.

El trabajo con recursos didácticos, en particular con software educativos, es considerado por los entrevistados como una estrategia que ayuda a evitar que el alumno cometa errores, generalizando propiedades que se presentan únicamente al pensar a partir del trabajo con

casos particulares. Con este tipo de recursos los docentes buscan que el estudiante logre establecer las diferencias necesarias entre la elaboración de conjeturas a partir de estos casos y la de situaciones genéricas. *“...ellos son muy de, si es un triángulo tomar un triángulo equilátero,... Entonces ver que... es un triángulo cualquiera y que también cumple con lo que ellos hicieron (E1)”*.

Dentro de los recursos didácticos empleados en el aula, el GeoGebra (Software libre para la educación Matemática) parecería ser el software mayormente seleccionado por los profesores de Bachillerato al momento de trabajar contenidos geométricos. En sus discursos indican la relevancia de enseñar al alumno un uso diferente de los recursos informáticos, utilizando expresiones como: *“El tema del trabajo con las computadoras a ellos les fascina y hay que meterle ahí [refiriéndose al empleo de software para la enseñanza de la Geometría] porque si no... ellos van a aprender cómo entrar en el facebook y cómo irse para otro lado, ¿no? usar la computadora para otra cosa (P2)”*.

El empleo de recursos didácticos tiene en especial una función de gran relevancia para el docente: que el alumno explore, pruebe, observe regularidades y logre a partir de ello efectuar conjeturas. *“... para mí que el chiquilín experimente primero... es la mejor opción... si a vos te dicen imagínate que pasa tal cosa, vos vas a decir “y bueno si me está diciendo que me imagine debe de ser así”. Pero si yo lo pruebo primero, lo experimento, como que la experiencia personal... (E2)”*

Estos expresan utilizar recursos didácticos a modo de disparador de la actividad propuesta con la finalidad de motivar al estudiante y que este logre visualizar los conceptos que desean ser abordados en un ambiente lúdico. *“Que arranque así la actividad. Y ellos empiezan a jugar (P4)”*

Sin embargo, es de consenso general de los entrevistados que el objetivo no es el emplear recursos solo por el hecho de hacer la clase más novedosa. Al preguntársele sobre el papel asignado al empleo de recursos didácticos, se obtienen respuestas tales como: *“es importante pero tampoco el abuso. Tampoco vas a trabajar todo porque todo es imposible (P4)”*.

El utilizar cuerpos de acrílico, geo espacios, GeoGebra o cualquier otro tipo de recursos solo por el hecho de ser recursos no aporta a la clase. *“Yo creo que todos los tipos de actividades,*

problema, ejercicio, medio decretazo, machaque y todo lo que vos quieras, todo sirve, todo aporta cosas... el recurso por recurso solamente, no te aporta (P1)”

Los entrevistados hacen énfasis en que se ha de emplear los recursos como un elemento que promueva los aprendizajes de los alumnos y no tanto en hacer la clase más novedosa. De lo expuesto hasta el momento y atendiendo la interrogante presentada durante las encuestas sería posible afirmar que los estos docentes indican utilizar recursos didácticos con el fin de favorecer los procesos de aprendizaje.

Esta cuestión no pudo ser evidenciada en el análisis documental efectuado ni en las expresiones dadas por el actor calificado, quien establece que los recursos didácticos prácticamente no se emplean en las aulas, haciendo referencia tanto al Bachillerato como al Ciclo Básico. *“... lo que se utiliza a veces, pocas veces,... es la computadora. El material concreto... en Bachillerato es como no bien visto por los propios docentes (Actor Calificado (AC))”*. Sin embargo el experto no descarta el empleo de este tipo de recursos en la totalidad de las aulas.

La opinión del actor calificado coincide con el discurso de los profesores cuando expresa que los recursos didácticos motivan a los estudiantes y constituyen una estrategia de quien enseña para que sus alumnos exploren, establezcan conjeturas y busquen dar prueba de sus afirmaciones. *“... sobre todo para conjeturar y el enunciar la propiedad. Para conjeturar, ver en dónde se cumple o no se cumple, entonces después viene el asunto de la demostración (AC)”*.

Sería posible preguntarse si lo que los entrevistados dicen hacer es lo que consideran que se debería hacer para favorecer los aprendizajes, aunque en el actuar se trasluzcan metodologías de enseñanza diferentes.

De lo expuesto por este grupo de docentes se deja entrever una intención de cambio en cuanto a las estrategias y metodologías de enseñanza que venían siendo empleadas. Sin embargo, hasta el momento solamente es factible establecer una arraigada existencia de un plano discursivo sobre el qué hacer en el aula, qué tipo de recursos implementar y cómo favorecer los aprendizajes.

4.3 b. Sobre la visualización y la abstracción

De los planteos realizados por los entrevistados, el visualizar aparece como un ítem fundamental ante la construcción de razonamientos. En correspondencia con los datos extraídos de las encuestas, los recursos didácticos son implementados de manera tal que el estudiante logre ver e interpretar las características de los objetos con los que se están trabajando. Para la mayoría de estos docentes, el empleo de recursos abre espacios para que el alumno logre ver más allá de lo concreto, para que el alumno llegue a abstraer. *“Bueno, primero entra por los ojos y después lo procesamos ¿no?... ellos ven muchas cosas, ven muchas cosas que no se cumplen, entonces la visualización es buena para generarle determinados conflicto ¿no? (P2)”*.

Esta opinión es compartida por el actor calificado quien establece que el material concreto además de despertar el interés favorece a que los estudiantes puedan *“concretizar”* una situación habilitando espacio a situaciones de aprendizaje en forma diferente a la tradicional. *“... entonces miraban qué pasaba, tenían otras posibilidades evidentemente y conjeturaban lindo y escribían y se entusiasmaban además, porque hay que trabajar en el espacio sin ver nada,... me pareció muy buena [clase],... porque haber llevado el material concreto que ayudó a concretizar la cosa porque es distinto (AC)”*

Al analizar las entrevistas a docentes fue posible observar que algunos de ellos optan por utilizar recursos didácticos únicamente al inicio de los temas a trabajar. Estos profesores expresan que una vez que los estudiantes son capaces de abstraer los conceptos ya no necesitan del recurso didáctico. En estos casos, cuando es necesario, se hace uso del espacio o mobiliario del salón de clase como estrategia de enseñanza. *“... empiezo y llevo [refiriéndose a materiales didácticos] y después no llevo más y después me quedo siempre con el imaginario o sino para los que no logran imaginarse, vuelvo al salón... ¿tenemos un cono en el salón? No, pero..., tenemos eso bancos... que si continúo eso me queda un cono,... (E3)”*; *“... cuando vos les decís un cubo... pensar que el salón tiene esa forma, aunque no sea un cubo perfecto pero me lo puedo imaginar (E1)”*; *“... la ubicación en el espacio, y esto lo he*

hablado con los profesores de educación física... como que logran dominar el espacio con su cuerpo, con los movimientos de sus cuerpos, y eso, con esos logro mejores resultados en Geometría (E3)”.

De lo expuesto anteriormente se podría establecer que, a pesar de ser una metodología de trabajo tenida en cuenta en pocas aulas de Bachillerato, algunos profesores optan por emplear el espacio que los rodea a modo de estrategia de enseñanza. Podría señalarse que estos docentes buscan que los estudiantes vivan, experimenten y piensen racionalmente a partir del espacio físico en el que se encuentran inmersos.

4.3 c. Las actividades de aula

Durante el trabajo de clase, la resolución de situaciones problemas en pares o en tríos, es la opción más empleada por este grupo de docentes. Estos indican que se ha de planificar y pensar en función del alumno y del concepto que se desee abordar. El recurso ha de permitirle al alumno construir el conocimiento. *“... me gusta trabajar,... con un problema disparador que ellos tengan que trabajar el problema y a partir de ese problema les vayan surgiendo cosas a lo largo del desarrollo del problema vayan obteniendo determinadas conclusiones que les permitan llegar a lo que yo quiero... abordar directamente. Y bueno después, la disponibilidad de materiales o de soportes que tengo... (P2)”*.

Sin embargo, al solicitársele al actor calificado que diera su opinión respecto de la expresión anterior, si bien estaba de acuerdo con la afirmación, sostuvo fehacientemente que ello no se cumple. *“Me parece muy bien, pero que de un problema allí surjan conocimientos matemáticos que el profesor los institucionalice a partir de la resolución de ese problema, eso no se ve, ni en primero ni en segundo Ciclo, no, eso no se ve (AC)”*.

Nuevamente se presentan afirmaciones en cuanto a la metodología de trabajo que los entrevistados estarían llevando a cabo que se contradicen con el punto de vista del experto.

Este desencuentro en lo referente a las metodologías de trabajo empleadas en el aula también se encontró presente durante el análisis del material documental. En él no aparecieron cuestiones que indicaran la atención a la especificidad conceptual de los estudiantes por parte del docente

Frente a estas consideraciones sería posible preguntarse hasta dónde existe, si es que lo hay, el abismo entre lo que estos profesores dicen hacer en el aula frente a lo que verdaderamente hacen.

Se presenta además una contradicción con respecto a los discursos referidos a la planificación y selección de los recursos didácticos. Por un lado, los docentes expresan atender las necesidades e intereses de los estudiantes. Por el otro, las actividades son generalmente pensadas y realizadas en forma coordinada con otros colegas, en particular al momento de organizar las actividades anuales como unidades temáticas, prácticos a proponer y propuestas de clase en general. *“...tuve la suerte de trabajar con adjuntos con los que planificamos juntos todo el año, entonces cuando hacíamos la selección de una batería de ejercicios decíamos, bueno, o de problemas, esto lo vamos a proponer para trabajar tal tema, esto tal otro y a partir de los ejercicios prácticos, trabajar los conceptos teóricos o bien consolidar como en este caso (E2)”*. *“... atendiendo a la sugerencia de compañeros que ya hace años que están trabajado... nos juntábamos a planificar” (E2)*. *“Viste que uno coordina con los demás docentes, sobre todo a principio de año, va... lo hacemos a lo largo de todo el año” (E3)*.

Considerando que las dudas de los estudiantes surgen en el día a día durante el desarrollo de la clase, es posible preguntarse cómo son tenidas en cuenta estas necesidades si la selección de las actividades es realizada por quienes enseñan en forma previa al comienzo de la unidad, inclusive, con anterioridad al comienzo del curso. Esto implicaría que muchas veces la planificación estaría siendo pensada desde la enseñanza y/o desde otras realidades, que no siempre son las de sus estudiantes.

Desde esta perspectiva las metodologías de enseñanza adoptadas por este grupo de profesores estarían siendo construidas sin atender, al menos previamente, las realidades de los alumnos desde sus singularidades -intereses, conocimientos previos, contexto-.

Del mismo modo, las actividades planteadas para trabajar contenidos teóricos son pensadas a partir de problemas o ejercicios concretos de práctico. El docente busca proponer actividades que integren una secuencia de contenidos cada vez más compleja: partiendo de casos concretos, con el apoyo de un recurso didáctico en la mayoría de los casos, se busca que de manera gradual el estudiante logre efectuar razonamientos cada vez más complejos, con el fin

de que sea el estudiante quien generalice el concepto que se desea enseñar. Los prácticos son pensados y planificados en forma previa a cada unidad, durante la etapa de selección de recursos, organización de la unidad temática y armado de propuestas de aula. “... yo pregunto una secuencia de los contenidos y que ellos van participando para poder construir (E4)”. “... para diseñar una clase pienso en el tema que voy a dar, bueno, que esté dentro de la secuencia de contenidos (P1)”. “Por lo menos una primera parte donde todos puedan hacer. Otra con una dificultad media y bueno la otra... que sea, te lleve por supuesto a elevar eso... (E2)”.

De este modo quienes trabajan en Bachillerato contarían con una batería de actividades secuenciadas para trabajar en clase pensadas a priori. Esto llevaría a considerar que los entrevistados piensan, organizan y planifican sus clases atendiendo básicamente la secuencia de contenidos programáticos que consideran que ha de seguirse para cumplir con sus objetivos de enseñanza de la mejor manera posible. Estas intenciones adoptadas por los docentes con el fin de lograr buenas planificaciones parecerían ser atendidas desde la enseñanza. Lo que cabe preguntarse es en qué momento de la planificación diaria son atendidos los procesos que han de llevar adelante los estudiantes para lograr los aprendizajes.

Durante el análisis documental, no fue posible encontrar datos que dieran respuesta a la interrogante anteriormente planteada.

Por tal motivo se procedió a consultar al actor calificado sobre el lugar que le dan los profesores a la planificación anual, obteniéndose respuestas como “Lo que se observa es un cronograma. Lo que se dice es en tales tiempos quiero enseñar esto, esto y esto y la replanificación se refiere a lo mismo... no es un análisis de qué tiene más relevancia desde el punto de vista matemático para que el chiquilín aprenda, qué tiene más relevancia para seguir con el curso siguiente, cuál es la fundamentación del por qué selecciono tales cosas y no tales otras (AC)”:

Del cruzamiento de los datos recabados parecería ser que la planificación anual es vista por los entrevistados como una cuestión que atañe al deber ser de la labor docente. Si bien podrían indicarse instancias de análisis por parte de estos profesores del qué, por qué y el cómo trabajar en el aula; este proceso de reflexión no se estaría registrando en los espacios correspondientes a tales fines. Tal es así que este documento estaría siendo elaborado por quienes enseñan para el cumplimiento de un requisito del deber hacer de su labor, más que un

espacio donde plasmar las intenciones del quehacer pedagógico, didáctico y reflexivo del hecho educativo.

Dentro del trabajo de planificación y organización de la clase, del análisis de las entrevistas a docentes es posible constatar que sobre todo ante cada nuevo tema tratan de comenzar con conceptos básicos y retomando lo trabajado en cursos anteriores. *“... y bueno obviamente con conceptos básicos comienzo, o sea que si voy a empezar, empiezo con lo que trabajamos en segundo. Tenemos en ese caso por ejemplo construcción de triángulos que es un tema que también se da en 2do que después se ve de nuevo en 4to cuando se agrega la parte de arco capaz por ejemplo, y... y ellos igual llegan y tienen dificultades, entonces se plantea el tema de construcciones y se comienza desde lo más sencillo, desde mediatriz, bisectriz (E1).”*

Se busca de este modo, no solo mantener una cierta secuencialidad en cuanto a los contenidos programáticos, sino que el estudiante se motive, evitando que atraviese por un sentimiento de fracaso ante el aprendizaje de nuevos contenidos. *“Y también ir escalonando, por ejemplo una actividad que no sea sólo una partecita... Entonces que por ejemplo, una primera parte que sea de abordaje, que todos la puedan hacer, porque... yo puedo hacerlo a eso a los gurises les re motiva porque si no, ya si a mí me bloquean de entrada, dejo el lápiz, dejo el cuaderno y no hago más nada. Por lo menos una primera parte donde todos puedan hacer. Otra con una dificultad media y bueno la otra... que sea, te lleve por supuesto a elevar eso,... (E2)”*.

En algunas oportunidades se hace mención a la modalidad de trabajo en Ciclo Básico, en especial en los discursos de aquellos entrevistados que presentan grupos de primer año de Bachillerato. *“...yo soy muy... profesora de Ciclo Básico... y a veces hasta me cuestiono si como profesora de Bachillerato no soy demasiado insistente, en ese tema de trabajar a partir de algún problema. Pero me parece que no, que es productivo (E2)”*. *“... de que ellos descubran todo? No sé, siempre trato, ¿no? porque me parece que es la mejor manera que a ellos les quede grabada lo los conceptos. ... me parece que Geometría tiene mucho de... Ciclo Básico (P3)”*.

Esto generaría preguntas que podrían ser atendidas en futuras investigaciones como por ejemplo la existencia de una Ciclobasicalización del Bachillerato. Con esto se estaría

haciendo referencia a si las estrategias de enseñanza empleadas en el aula son las mismas para ambos ciclos de Formación Secundaria, independientemente del concepto matemático que se desee abordar.

En reiteradas ocasiones, la experiencia como estudiante aparece como denominador común al momento de pensar la clase, ya sea para seleccionar la actividad, para seleccionar los recursos con los cuales trabajar o para organizar la dinámica de aula. *“Yo qué sé, no sé si es la mejor, creo que es distinta... a mí me pasó como alumno que fui memorizando todas las propiedades para el primer parcial y terminó el primer parcial y borrón y cuenta... (P4)”*. *“... a mí me pasaba cuando yo estudiaba... nos juntábamos para estudiar y ellos no entendían y lo que pasaba era eso que ellos no lo podían ver imaginárselo... no podían buscar una solución para el problema (E4)”*

De lo expuesto anteriormente parecería ser que al momento de seleccionar las actividades de clase, una estrategia de enseñanza o los recursos didácticos a implementar para lograr sus objetivos de enseñanza, los docentes se encuentran imbuidos de sus experiencias personales como estudiante.

4.3 d. Los razonamientos de los estudiantes

El trabajo a partir del error se presenta, en la mayoría de los casos, como una herramienta más que abre espacios a la discusión y argumentación de razonamientos. De este modo se busca que los estudiantes justifiquen el por qué de la afirmación dada. Del intercambio de posturas y mediante la intervención del docente se trata de construir el concepto que se desea enseñar. Sin embargo, de acuerdo con lo expresado por los entrevistados, estos argumentos discursivos son trabajados siempre en forma oral registrándose por escrito únicamente las principales conclusiones. *“Traté de recordar qué errores había visto cuando hice el monitoreo y trabajé a partir de errores... (E2)”*, *“... si se equivocan viene bárbaro para corregir (E4)”*. *“Uno siempre trata de aprovechar, de razonar sobre esas equivocaciones... (E1)”*.

La duda es presentada como una estrategia de clase para provocar que los estudiantes discutan y den argumentos con la finalidad de convencer a sus pares de que la afirmación que han realizado es la correcta. Los recursos didácticos, en muchas oportunidades permiten una primera aproximación a esta etapa de verificación de la conjetura efectuada. Los entrevistados buscan generar estos espacios de intercambio entre estudiantes tratando de intervenir solo cuando consideran necesario dar orientaciones o agregar un nuevo conflicto a sus razonamientos. “... ellos van, prueban, sacan la conjetura y la otra participación mía es ¿siempre? “Y siempre profesor” Y ahí les mostrás un caso que genere dudas (P4)”. “... después el hacerlos dudar de haber; unos propusieron una estrategia, otros propusieron otra, y bueno, a ver cuál era la adecuada, y llegaron a la conclusión (E2)”

Corroborando los datos obtenidos durante el análisis de las encuestas, la resolución de situaciones problemas parecería ser una de las estrategias más usadas por los docentes para generar espacios donde los estudiantes den argumentos sobre una conjetura efectuada y traten de sostenerlos o de convencer al otro de la afirmación que han establecido. Para ello, en la mayoría de las oportunidades, quienes enseñan tratan de implementar recursos didácticos que brinden modelos de apoyo visual ante la producción de razonamientos. Los software son presentados como uno de los recursos más utilizados para que el estudiante pruebe si su afirmación en verdad se cumple. A partir de allí los docentes, en particular los de 3er año de Bachillerato que tienen a su cargo cursos de Físico – Matemático, buscan avanzar en los procesos de prueba de las conjeturas efectuadas por los estudiantes. “Entonces será, no será, y se ve la necesidad, vamos a ver si lo podemos probar. Entonces claro lo primero es verlo rápidamente con el medio informático (P2)”.

Ya sea a partir de software, de materiales tradicionales o de material concreto, las actividades de exploración y discusión se presentan dentro de las propuestas más implementadas en Bachillerato. Los profesores indican al grupo la dinámica de trabajo junto con la actividad a realizar habilitando espacios de intercambio entre los estudiantes. “... primero lo hicimos con una experiencia con una escuadra nomás... Cuantos más triángulos ellos formaban, más iban a anotar. Entonces, tenían que llegar a esa conclusión (P3)”. “Entonces una de las ideas fue trabajar con... unos palitos articulados, donde la idea era que ellos armaran el modelo, empezaran a moverlo y buscaran las relaciones que les quedaban, que era un ángulo inscripto y adentro lo que era un ángulo al centro (P4)”.

En estos períodos de trabajo, los entrevistados expresan pasar por los bancos tratando de intervenir lo mínimo posible en los razonamientos de los alumnos con la finalidad de evitar “contaminar (P2)” la producción de pensamientos. *“En principio los dejo que entre ellos discutan, que ellos elaboren, nada de incidir en nada, no quiero contaminar, porque viste que uno no se aguanta y les tira una idea que los induce a algo (P2)”*.

Cada una de estas instancias de reflexión es acompañada por una explicación de los procesos de razonamientos y las conjeturas efectuadas. *“Entonces les digo: “escriban ahí todo lo que hicieron, qué razonamiento lo llevó a eso (P1)”*. Sin embargo, de los discursos docentes, si bien hasta el momento es posible observar que el trabajo con recursos didácticos juega un papel de relevancia en las aulas de Bachillerato, surge la duda de si los textos realizados por los estudiantes, ya sean en forma escrita u oral, corresponden a expresiones argumentativas o simplemente descriptivas. *“... lo que ellos iban haciendo era registrar en el cuaderno,... esa fue una clase que ellos sacaban propiedades y las escribían (P3)”*. *“Y ahí ellos trabajaron con Cabri 3D y ellos ahí encuentran, ven, visualizan propiedades... y después ellos tenían que exponer el procedimiento, cómo lo habían hecho (P4)”*.

Como se mencionó con anterioridad, las dificultades de los estudiantes parecerían no encontrarse solamente en la elaboración de textos sino que, según los entrevistados, esta situación se encuentra acompañada de otro obstáculo: las carencias en cuanto a los conocimientos de notación Matemática. *“Todas las actividades de Geometría siempre las acompaño,... con la explicación al lado, aunque ellos no logren del todo usar el lenguaje o la anotación... científica... aunque sea con sus propias palabras trato de que ellos los expliquen (P1)”*. *“Lo primero que noto es que no utilizan lenguaje de Geometría, ellos explican tal cual, con palabras... (E4)”*.

Al preguntarle a los docentes por el proceso de argumentación seguido por los estudiantes expresan que si bien todo tipo de actividad le aporta al estudiante la posibilidad de expresar en forma fundamentada el por qué del razonamiento seguido, en general el trabajo mediante la resolución de problemas es la opción a la que más se adscriben. *“Creo que la que más aporta al proceso de argumentación es la de resolución de problemas porque ahí es donde, bueno, ellos tuvieron que buscar estrategias para resolverlo, buscar cosas que sabían, cosas anteriores y es cuando ellos dicen, bueno “pude resolverlo” y pueden explicar. Cuando vos le*

ponés algo mecánico o bien igual a otras cosas anteriores ellos no te van a argumentar, si no que te van a repetir el concepto anterior (P1)”

4.3 e. Sobre la construcción de conceptos

La puesta en común es considerada como el principal espacio donde se aúnan criterios, se discuten opciones y resoluciones. Allí se busca plasmar acuerdos comunes, corregir errores, sortear dificultades y construir los nuevos conceptos mediante el intercambio de ideas y opiniones. “... cuando se hace la puesta en común, se pide la opinión de los chiquilines, a ver qué fue lo que hicieron y bueno... a partir de ahí se trabaja (P1)”. “... fue aporte de varios de los chicos y... bueno en el intercambio íbamos descartando o aceptando, ... suposiciones, supuestos, ... (E2)”.

De las entrevistas analizadas parecería ser que es una dinámica general de trabajo que en esta instancia el docente oriente a los estudiantes mediante un sistema de preguntas – respuestas. La interrogación didáctica aparece en los procesos de cierre de las actividades propuestas como la principal estrategia empleada por los profesores de Bachillerato. “Voy trabajando yo en el pizarrón y ellos van participando. Se trata de ir construyendo. Siempre, yo como que les voy preguntando y si hay alguien que lo dice mejor, sino bueno... yo pregunto una secuencia de los contenidos y que ellos van participando para poder construir (E4)”.

Es posible afirmar que luego del trabajo individual o grupal, los entrevistados tratan de lograr la construcción de conceptos a través de la exposición de los argumentos efectuados por los estudiantes con el fin de convencer a sus compañeros de la veracidad de sus conjeturas. En aquellos casos en que no se ha llegado a una conclusión o que se presentan errores o dificultades en las afirmaciones establecidas por los estudiantes el docente busca generar, mediante sistemas de preguntas y respuestas, instancias de reflexión y discusión que permitan llegar a la conclusión deseada mediante la elaboración de argumentos.

4.3 f. La argumentación

En una primera instancia del análisis de encuestas se presentó la duda de si el concepto de argumentación era manejado por los docentes de la misma manera que en la presente investigación: razonamiento discursivo elaborado con la finalidad de convencer a la otra persona de una afirmación que se desea sostener. Según el estudio realizado, en algunas situaciones al hablar de procesos de argumentación los profesores hacían referencia al razonamiento previo, necesario para la resolución de toda actividad o a la explicación de los pasos seguidos durante la construcción de una figura; cuestiones presentadas con los mismos discursos durante el análisis de las entrevistas. *“Primero que nada cuando ellos deciden qué es lo que necesitan para resolver el problema, digo ahí me parece que están en el primer punto para después empezar con la argumentación. Cuando lo construyen, ya están en la argumentación, lo estarían verificando. Cuando construyen la figura, ahí empiezan a verificar (E4)”*.

A pesar de que no quedaba muy en claro el tipo de discurso que los entrevistados trataban de promover, se buscaba en todo momento que el estudiante explicara el procedimiento seguido durante, por ejemplo, el proceso de construcción de una figura, procurando dar cuenta de los razonamientos efectuados.

Sin embargo, en un segundo nivel de análisis fue posible dar sustento a la interrogante inicialmente presentada. Si bien algunos docentes parecerían confundir el proceso de argumentación con el razonamiento previo necesario para la resolución de toda actividad, la mayoría de los entrevistados atenderían la denominación expuesta en el presente trabajo. *“...se observan diferentes figuras, se comenta, cada uno comenta... ahí sí se debate qué les parece a los demás... qué van complementando (E1)”*. *“... en forma oral y constructiva, ... fue aporte de varios de los chicos y... en el intercambio íbamos descartando o aceptando, ... suposiciones, supuestos (E2)”*. *“... generalmente los razonamientos trato de que ellos lo expliquen (P1)”*. *“... ellos tienen que fundamentar, yo les digo siempre no es contarse, es fundamentar, entonces ellos a partir de entrar en esa línea de razonamiento o estar en esa forma de actuar... entonces empieza como un proceso (P2)”*.

En este orden de cosas en el aula se estarían presentando instancias de discusión e intercambio entre los estudiantes. En ocasiones con aportes de los docentes, en ocasiones mediante el trabajo en pequeños grupos, la mayoría de los entrevistados busca que los

estudiantes expliquen los razonamientos y mediante el debate de ideas lleguen a la construcción del concepto.

Podría establecerse entonces que en la mayoría de las aulas de Bachillerato los docentes, sujetos de esta investigación, buscan proponer instancias de reflexión y fundamentación de las conjeturas efectuadas por los estudiantes. La puesta en común colectiva parecería ser el momento de intercambio de opiniones de los estudiantes y por lo tanto el principal espacio de construcción de conceptos.

4.3 g. La demostración

La demostración, entendida como la acción de establecer una secuencia lógica de enunciados que den prueba, consecuentemente, de una nueva afirmación, es presentada por la mayoría de los profesores de Bachillerato como una “*asignatura pendiente*” (P1), haciendo referencia a la carencia que existe en cuanto a su abordaje. Estos docentes expresan que el enseñar a demostrar no siempre es trabajado como tal en el aula ya sea porque no todos los programas lo exigen o porque los tiempos de aula no lo hacen posible. “*Las demostraciones son asignaturas pendientes de los programas hoy en día, no te piden mucha demostración... Y las pocas demostraciones que uno hace, termina haciéndolas uno en el pizarrón... Reconozco que a mí me falta enseñarles a que puedan ellos demostrarlo y dejarlos, ¿pero cuánto tenés que dejarlos?... reconozco que es materia pendiente de nosotros y de los programas que no exigen demostrar casi nada (P1)*”.

En contraposición a lo expuesto anteriormente, en los programas de Bachillerato, en particular en cursos de 3er año se presentan orientaciones como “*En esta etapa se pretende enfrentar al alumno con un método de trabajo más riguroso que el realizado en cursos anteriores, fomentando una participación activa en la resolución de problemas donde se estimulara la experimentación, elaboración de conjeturas y demostración de las mismas*” (Programa de Matemática, 3er año Bachillerato, opción Matemática y Diseño, 2006; 1).

La opinión dada por el actor calificado, al igual que el análisis documental de los programas oficiales, presenta un fuerte punto de desencuentro con el discurso de estos docentes. El experto afirma que en ningún momento en los programas de Secundaria se indica que no es necesario trabajar la demostración. Enfatiza además que esto es algo que se encuentra presente en *“el imaginario del colectivo docente”*. *“Los programas no hablan de no demostrar nunca, eso es algo que está en el imaginario del colectivo de los docentes, que ahora dicen que no hay que demostrar, eso no existe (AC)”*.

Enfatiza que, contrariamente a lo expresado por los profesores, la demostración ha de comenzarse a trabajar desde el primer año del Ciclo Básico para que el estudiante vaya adquiriendo, a lo largo de su transcurso por la educación media, las habilidades implicadas en el razonar deductivamente. *“...el que ellos descubran cómo funciona el razonamiento deductivo y que en definitiva eso es el núcleo fundamental de la asignatura, que se está perdido casi en los cursos de Ciclo Básico y MUY perdido en primero y segundo de Bachillerato... (AC)”*

Desde los planteos efectuados hasta el momento y de las opiniones contrapuestas entre los profesores y el experto y el análisis documental, parecería ser que la demostración es entendida por estos docentes como un contenido a trabajar en el aula más que como una habilidad que el estudiante ha de desarrollar.

Algunos de los entrevistados expresan abordar el trabajo con las demostraciones adoptando las mismas metodologías de enseñanza que les fueron transmitidas por sus docentes en sus épocas de estudiante indicando no saber cómo enseñar al alumno a demostrar y que surja de ellos la necesidad de hacerlo. *“... históricamente aprendí Matemática y era teorema-demostración, era una cosa de memoria. Y vos tenías ¿te acordás de la demostración del teorema del resto” o yo que sé, no la hacías vos la hacía el profesor. Y bueno uno tiene, yo más o menos tengo... o sea sigo... (P1)”*. *“Yo creo que ahí está el problema, entonces nosotros estamos forzando que sea necesario demostrar (E3)”*

Esta visión es compartida por el experto quien indica que a pesar de que es posible ver pequeños cambios en cuanto a la metodología de abordaje de la demostración en las aulas de Bachillerato, existe una tradición que se encuentra muy arraigada al quehacer de la labor docente. *“En general es trabajada con un rol protagónico del profesor,.. Los cambios se*

ven, ... es un proceso largo, difícil porque además venimos de una tradición desde el punto de vista de la enseñanza y específicamente de la demostración en que, se considera digamos que el alumno aprende con una transmisión directa del conocimiento, ¿no?, y el profesor escribe y el chiquilín supuestamente aprende... (AC)”.

Es posible observar cómo las concepciones de los entrevistados relativas al cómo enseñar, se encuentran embebidas por las tendencias y tradiciones educativas vividas a lo largo de la historia. Nuevamente la experiencia de estudiante surge como un elemento determinante en las opciones de enseñanza de estos profesores.

Durante el análisis de las entrevistas se hace referencia a que la metodología de trabajo que quienes enseñan consideran más adecuada para que el estudiante aprenda a demostrar o a argumentar es mediante el trabajo en pequeños grupos, explicaciones de programas de construcción o elaboración de trazados. *“...ellos van trabajando y manipulando en el papel y en el GeoGebra, después la formalización es un paso que cuesta mucho (P4)” “...probamos con el GeoGebra... ellos hacen conjeturas y luego fundamentan esas conjeturas y luego, bueno, empiezan a tratar de plasmar y decir bueno, esto entonces tiene un sustento Matemático, esto es así... (P2)” “... cuando queríamos demostrar lo hacíamos a partir del práctico,... ellos partían de... un ejemplo concreto y después... generalizábamos... con los chiquilines, interactuando (E2)” “...un problema de Lugar Geométrico que siempre lo pongo... (P1)”.*

Existiría de este modo una clara intención por parte de los docentes de producir cambios en las formas de abordaje de las demostraciones. A pesar de que estos cambios no son vistos por el actor calificado en todas las aulas, este considera que hay un lento proceso que se viene cumpliendo. Quienes enseñan buscan un tratamiento de la demostración mediante la resolución de problemas, actividades de discusión, trabajo en pequeños grupos, entre otros. *“...hay un proceso que se viene cumpliendo, con distintas estrategias, distintos modos de tratar la demostración, completar fichas, en fin... de no proponer sólo demostrar tal cosa sino proponer problemitas y decir “bueno a ver... acá... reconocer cuál es la hipótesis y tesis en este enunciado” por ejemplo, o qué teorema siempre tiene esta misma tesis. O sea hay un trabajo que se va haciendo así que ayuda al aprendizaje de la demostración, ¿verdad? Es lento... (AC)”.*

A pesar de los obstáculos mencionados y atendiendo las dudas concernientes a los mecanismos de abordaje de las demostraciones en Bachillerato, es posible observar que, de acuerdo con lo expresado por el experto, en mayor o menor medida, los entrevistados procuran obtener los aportes de los estudiantes elaborados durante el trabajo individual o grupal. Se busca construir cadenas de razonamientos a partir de los pensamientos de los alumnos. En la mayoría de los casos, es el docente quien ordena, organiza y registra la información durante la puesta en común, otro aspecto que parecería confundirse con la metodología de trabajo empleada en cursos de Ciclo Básico. *“... los dejaba trabajar, ellos escribían lo que conjeturaban y después hacían una puesta en común, organizaba... (AC)”*.

En particular aquellos que tienen a su cargo grupos de 3er año de Bachillerato, opción Físico - Matemático, tratan de generar en el alumno la necesidad de establecer la veracidad de una conjetura mediante procesos de prueba. Este tipo de acciones son en especial llevadas a cabo por quienes optan por trabajar con software educativos como recursos en el aula. *“Ellos se van dando cuenta... que la idea es fundamental, se dan cuenta que hay que hacer una secuencia de razonamientos válidos, diferentes a los que hizo el profesor, entonces ellos le van encontrando la vuelta. Igual yo los dejo que ellos hagan escrituras desordenadas, feas y después vamos puliendo (P2)”*

Por su parte, los docentes del resto de las orientaciones expresan emplear recursos didácticos con la finalidad de que el estudiante experimente y llegue al concepto que se quiere trabajar, pero no como una herramienta que genere la verdadera necesidad de dar prueba de que la conjetura efectuada se cumple. Los entrevistados expresan la aceptación del estudiante de esa afirmación por lo que la demostración, cuando se hace, tiende a ser forzada y enseñada por el profesor.

Uno de los motivos a los que podría deberse esta situación radicaría en el hecho de que las propiedades a demostrar son decididas a priori por el docente o grupo de docentes que planifican el año en forma conjunta. De este modo, la decisión del qué demostrar y qué no, estaría pautada por quien enseña, sin presentársele al alumno como una necesidad de dar prueba de una afirmación. *“... cuando queríamos demostrar lo hacíamos a partir de un*

ejercicio del práctico,... cuando elaborábamos el práctico, nosotros nos juntábamos a elaborar la unidad didáctica, la secuencia que íbamos a seguir dentro de la unidad y el o los prácticos correspondientes a esa unidad, antes de empezar el teórico. Entonces nosotros decíamos “bueno, en este, con este ejercicio, ¿qué vamos a trabajar?, tal propiedad o tal otra (E2)”

Desde estas consideraciones podría decirse que en la mayoría de los grupos de Bachillerato, más que enseñar al estudiante a demostrar, lo que se les estaría enseñando sería una demostración. A diferencia de los docentes que dictan cursos en 3er año de Bachillerato opción Físico - Matemático, los del resto de las orientaciones son quienes optan por una u otra propiedad a demostrar, indicando atender especialmente los tiempos curriculares. *“Y ¿te acordás por qué decidiste trabajar con esa demostración? (P) - ¿Por qué?... porque es la clásica nomás (E3)”*. *“... a mí me falta enseñarles a que puedan ellos demostrarlo y dejarlos, ¿pero cuánto tenés que dejarlos? (P1)”*.

4.3 h. Sobre los tiempos

Si bien los tiempos de aula (período duración de una clase de 45 minutos) no siempre son suficientes, la preocupación por la falta de tiempo lectivo (clases efectivamente dictadas a lo largo del año) para cumplir con el programa es claramente expresada a través de opiniones tales como: *“... problemas para completar el programa, “no da el año”, los tiempos curriculares no son suficientes. “O me centro en el programa o los dejo que piensen y construyan (E1)”*. De este modo, se da respuesta a la duda referente a los tiempos que había sido generada durante el proceso de encuestas ya que los datos recabados en dicha instancia no eran suficientes para comprender si al hablar de tiempos los profesores hacían referencia a tiempos de aula o tiempos del año lectivo. Sin embargo, se presenta la interrogante de si el concepto de tiempo curricular (tiempo sugerido en los programas que ha de dedicarse al tratamiento de cada unidad temática) y tiempo lectivo es manejado del mismo modo por estos docentes que en el presente trabajo.

Estarían expresando que, salvo raras ocasiones, no es posible atender tiempos de enseñanza y tiempos de aprendizaje simultáneamente. De los datos recabados por las entrevistas se

desprende que la mayoría de los profesores de Bachillerato prefieren, dentro de ciertos parámetros, priorizar los tiempos de aprendizaje antes que los de enseñanza. “... *los tiempos curriculares no son suficientes. O me centro en el programa o los dejo que piensen y construyan (E1)*”.

Esta situación es también planteada por el actor calificado, quien asiente sobre las dificultades presentes en las aulas de Bachillerato con el cumplimiento de la totalidad del programa si el docente desea atender los tiempos de aprendizaje. Expone además que existen tiempos que son necesarios respetar para que los estudiantes sigan un proceso de aprendizaje. El experto entiende que este proceso se inicia en primer año de Ciclo Básico, siendo necesario ir profundizando secuencialmente en cada curso habilidades que permitan al estudiante profundizar en sus formas de razonamiento. “...*a veces los programas son muy largos y que por más que tú quieras jerarquizar, es muy difícil... y eso lleva tiempo, lleva tiempo porque ahí hay que trabajar con conceptos previos, mirar bien qué vas a introducir y qué conceptos previos vas a necesitar y ahí tenés que trabajar una clase o más. Y ahí el plantear el problema que ellos encuentren algo allí para conjeturar y después viene la demostración. Lleva tiempo (AC)*” “...*es un proceso lento, que tiene que empezar en el primer año de Ciclo Básico (AC)*”

De lo antes expuesto podría establecerse que quienes enseñan se enfrentan constantemente ante la necesidad de la toma de decisiones, optando en la mayoría de los casos por priorizar los procesos de construcción de razonamiento por parte de los estudiantes antes que el cumplimiento de la totalidad del programa. De este modo, los docentes estarían dando mayor relevancia al trabajo matemático efectuado por los estudiantes y por ende a su aprendizaje. Lo que llevaría a preguntarse si la imposibilidad de trabajar todos los contenidos programáticos se debe a la falta de tiempos curriculares o a los tiempos lectivos.

Se presenta de este modo una contradicción entre lo expresado por los entrevistados sobre los tiempos de enseñanza y los tiempos de aprendizaje. Dicen por un lado prestar especial atención a la instancia de planificación de la unidad donde las actividades son pensadas y organizadas desde la enseñanza y, por el otro, dicen atender las necesidades de los alumnos teniendo en cuenta los tiempos dedicados para el aprendizaje.

Cabe enfatizar sobre la interrogante referida a la dificultad planteada por los entrevistados ante el cumplimiento con la totalidad de los contenidos programáticos al tratar de atender los tiempos de aprendizaje. Lo que lleva a preguntarse si las causas de esta situación se encuentran asociadas a los tiempos curriculares, a las metodologías de trabajo implementadas por algunos profesores de Bachillerato o al diseño y organización de las propuestas de clase (clases de Geometría pensadas como una secuencia de contenidos independientes uno de otros y cuya suma de tiempos sobrepasa los tiempos curriculares).

Durante la entrevista realizada al actor calificado, fue posible dar respuesta a esta interrogante. El experto afirma que en algunos casos los contenidos indicados en los programas para ser trabajados a lo largo del año son muy extensos. Acuerda además que si el docente efectivamente desea respetar los tiempos de aprendizajes, es recomendable la selección y priorización de aquellos contenidos más relevantes tanto para ese curso como para el curso que le sigue. “... lo que nosotros desde aquí otra vez entendemos, es que es mejor trabajar así con algunos conceptos y bueno y si hay algunos otros que no se pueden enseñar no se enseñan (AC)”.

En síntesis:

Del análisis de los datos recabados durante las entrevistas realizadas a los docentes de Bachillerato, al actor calificado y del estudio de los materiales documentales recabados, es posible concluir que:

- Los recursos didácticos implementados en el aula son de lo más variados. Sin embargo se detectaría una mayor tendencia a preferir utilizar software, en particular en los cursos más avanzados de Bachillerato.
- Mediante el empleo de recursos didácticos los entrevistados buscan atender tanto los procesos de pensamiento de los estudiantes como los contenidos disciplinares. El estudiante interactúa con una representación del objeto geométrico y a partir de esa interacción quien enseña espera que los alumnos logren, mediante la reflexión y el análisis, expresar sus ideas. Esta postura es adoptada por la mayoría de los docentes de Bachillerato, quienes buscan que sus estudiantes se apropien, del lenguaje geométrico necesario para comunicar sus razonamientos a pesar de sus carencias en este tema.

- Podría establecerse que estos profesores de Bachillerato cuyos cursos presentan contenidos geométricos tratan que sus estudiantes piensen racionalmente sobre los objetos geométricos con los cuales se trabajan. El empleo de recursos didácticos, figuras de análisis, software, entre otros, son los medios empleados para lograrlo.
- Se presenta una contradicción entre el planteo realizado anteriormente y la opinión del experto quien indica que existe una marcada desvalorización del emplear materiales concretos en el aula, en especial en Bachillerato. Sin embargo establece que aunque poco frecuente, el material concreto es tenido en cuenta por algunos de los entrevistados como una estrategia más a la hora de presentar propuestas de aula.
- De lo expuesto hasta el momento cabe preguntarse si los docentes no se encontrarían atravesando una lenta, pero nueva etapa de revisión y cambio de las estrategias de enseñanza de la Geometría.
- La puesta en común se presenta como la principal instancia de construcción y formalización de los temas. Se trata de construir junto a los estudiantes los conceptos geométricos que son abordados durante el trabajo previo y la interrogación didáctica es la estrategia mayormente empleada durante esta instancia.
- Seguido a la interrogación didáctica, la duda y el error aparecen como estrategias utilizadas en la construcción de los razonamientos durante el proceso de la puesta en común. Sin embargo, en la mayoría de las oportunidades, es el docente quien ordena, organiza y registra las principales conclusiones arribadas.
- Las actividades en pequeños grupos y de resolución de problemas son las más seleccionadas. En especial, los entrevistados procuran proponer actividades donde el estudiante pueda investigar, discutir y efectuar conjeturas, tratando de diseñar propuestas que presenten una secuencia de contenidos cada vez más compleja.
- Los profesores tratan de fomentar la construcción de textos particularmente orales. Buscan que los estudiantes fundamenten los razonamientos elaborados ya sea en forma individual o colectiva. El principal espacio de discusión, intercambio de opiniones y argumentación se presenta durante la instancia de puesta en común de la actividad propuesta.
- Del análisis de las entrevistas es posible observar que existen diferencias notables en cuanto a las estrategias de enseñanza de la demostración empleadas entre las distintas opciones de Bachillerato. Por un lado los docentes de la opción Físico – Matemático que buscan generar el interés y la necesidad de dar prueba de las conjeturas efectuadas. Y por el otro se encontrarían los del resto de las orientaciones de Bachillerato quienes indican que son

los estudiantes quienes no sienten la necesidad de demostrar. De este modo surge la duda de si los profesores de Bachillerato opción Físico – Matemático enseñan al alumno a demostrar mientras que los del resto de las orientaciones enseñan una demostración.

- Los estudiantes no siempre sienten la necesidad de demostrar por lo que en la mayoría de las aulas de Bachillerato los profesores culminarían forzando la elaboración de demostraciones. Esto lleva a preguntarse si la causa de tal situación puede deberse a los intereses de los propios estudiantes o a que, en la mayoría de los casos, la propiedad a demostrar se encuentra pautada a priori por quien enseña. Esta cuestión podría estar determinada por la propia modalidad en que la clase de Matemática es modelada por los entrevistados: pensada y organizada a priori por un grupo de docentes que, más allá de atender las características particulares de cada aula, busca atender la mejor secuencia de contenidos posibles. De ser así, en la clase de Matemática en Bachillerato se estarían priorizando los procesos de enseñanza sobre los de aprendizaje.
- La biografía personal de los profesores desde su experiencia como estudiante se presenta como un factor determinante ante la toma de decisiones al momento de seleccionar los recursos y estrategias a implementar en el aula.
- La visualización, entendida como el saber ver, es considerada como un paso fundamental para que el estudiante logre desarrollar la abstracción y junto a ello procesos de pensamiento más elaborados y los recursos didácticos son considerados el apoyo necesario para lograrlo.

5. Conclusiones

“Caminante no hay camino, se hace camino al andar”

(Antonio Machado, 2000; 91).

El presente trabajo buscó indagar en las prácticas de enseñanza de la Geometría en Bachillerato. Para ello se procuró determinar las valoraciones que los docentes de estos cursos hacen acerca del empleo de recursos didácticos. También se buscó encontrar testimonios que fundamentaran el abordaje de las demostraciones geométricas, en particular el tratamiento de las prácticas argumentativas.

Se pretende dar a conocer las conclusiones arribadas exponiendo las principales cuestiones que caracterizan la enseñanza de la Geometría del grupo de profesores de Bachillerato que participaron de esta investigación.

A partir del estudio efectuado fue posible establecer tres categorías que dan cuenta de las prácticas de estos docentes:

- Prácticas de representación material
- Práctica de transformación
- Práctica invisible

5.1. Prácticas de representación material

Al tratar de establecer aquellas cuestiones que caracterizan las prácticas de enseñanza de la Geometría en Bachillerato, es posible observar que la preocupación de los docentes por el mejoramiento de sus prácticas de aula los ha llevado a la búsqueda de actividades que rompan en mayor o menor medida con las prácticas tradicionales de enseñanza.

A pesar de ser un proceso lento, según planteos efectuados por el actor calificado, se viene dando un cambio en las formas de abordaje de los contenidos matemáticos.

Para favorecer los procesos de aprendizaje de los estudiantes, los docentes buscan proponer actividades que impliquen el empleo de recursos didácticos, en especial software educativos, que permitan representar las situaciones planteadas. Se pretende de este modo lograr el interés de los estudiantes, mediante una aproximación más concreta al objeto matemático. Se estaría presentando en la opinión de estos docentes que la actividad intelectual y de reflexión que el estudiante realice durante la adquisición de los conocimientos favorecería su tránsito por diferentes procesos de pensamiento: de lo concreto a lo abstracto.

El empleo de recursos didácticos parecería ser un elemento de relevancia al momento de seleccionar las estrategias de enseñanza. Estos funcionarían de soporte para la actividad intelectual que el estudiante ha de realizar para la construcción de los conceptos. Los recursos didácticos son principalmente utilizados con el fin de que el estudiante experimente, explore y conjeture, permitiendo una primera aproximación al proceso de razonamiento deductivo. Quienes enseñan esperan que estos recursos sirvan de sustento para el desarrollo de habilidades como la visualización, la abstracción, la elaboración de conjeturas, la argumentación.

La preocupación de estos docentes atiende a cuestiones concernientes tanto a los procesos de aprendizaje de los estudiantes como a los procesos de enseñanza llevados a cabo en el aula.

Por un lado, desde comienzos del año, los docentes se preocupan por la organización y selección de recursos que serán implementados en forma secuencial y escalonada para que los conocimientos sean enseñados de la mejor forma posible.

Por el otro, se proponen actividades grupales, promoviendo la discusión de ideas. Para ello se opta por representar materialmente situaciones: representar el objeto geométrico con el que se está trabajando con el fin de favorecer los procesos de razonamiento de los estudiantes.

De acuerdo con el estudio realizado podría establecerse que existen prácticas de representación material de la Geometría llevadas a cabo por el grupo de docentes de Bachillerato con las que se trabajó durante este proceso de investigación.

5.2. Práctica de transformación

En Bachillerato comienzan a observarse cambios en cuanto a la metodología de abordaje de los contenidos geométricos. En particular, los procesos de argumentación dejan de enseñarse desde el rol protagónico del profesor.

Aparecen distintos modos del tratamiento de la demostración. Trabajos en pequeños grupos, empleo de recursos didácticos, trabajo con fichas, resolución de problemas, entre otros, son estrategias empleadas por los docentes para que el estudiante aprenda el funcionamiento del razonamiento deductivo.

Estas estrategias de enseñanza permitirían, una vez más, romper con un modelo educativo tradicional que hasta este momento parecería seguir presente en el trabajo con las demostraciones en Bachillerato. Según los planteos realizados por el actor calificado, la voz del estudiante estaría cada vez más presente en las aulas. Por lo que es el estudiante quien valiéndose de las estrategias propuestas por el docente, ha de desarrollar las habilidades implicadas en el tratamiento de las demostraciones.

Sin embargo, en ocasiones este aprendizaje se ve obstaculizado por dos cuestiones.

Por un lado, la dificultad de romper los lazos que los unen a los docentes a sus experiencias como estudiante.

Por el otro existen tiempos de aprendizaje que han de respetarse. En los discursos de los entrevistados se destaca la relevancia en cuanto al tratamiento de la demostración de manera continua y secuencial desde primer año de Ciclo Básico. De este modo, se espera que el estudiante adquiera las habilidades necesarias para que, al llegar al Bachillerato, logre enfrentarse a procesos de razonamiento deductivos cada vez más complejos.

Se observa en el colectivo docente un incremento de una conciencia de cambio en el abordaje metodológico de la demostración. Ya no es el docente quien llega al aula y escribe “Hipótesis, Tesis, Demostración”.

Comienzan a buscarse formas alternativas para el tratamiento de las demostraciones y de las prácticas argumentativas. El rol protagónico del docente sufriría transformaciones. Los

entrevistados parecerían interesarse por la búsqueda nuevas estrategias para el tratamiento de la demostración en el aula. Se comienzan a implementar propuestas de enseñanza que impliquen una actividad previa por parte del estudiante (pensar y reflexionar sobre la propuesta atendiendo sus conocimientos previos), planteando situaciones problemas que permitan arribar a las conclusiones deseadas mediante la elaboración y contrastación de conjeturas. Se seleccionan problemas y actividades que impliquen un verdadero proceso de producción Matemática en el aula y no la mera aplicación de un algoritmo de demostración.

A partir del análisis efectuado es posible constatar la existencia de fuertes intenciones de cambio en cuanto a las metodologías de abordaje de las demostraciones en Segundo Ciclo. Se estaría ante la búsqueda de formas alternativas para el tratamiento de las demostraciones geométricas, presentándose prácticas de transformación en las aulas de Bachillerato.

5.3. Práctica invisible

Una de las tareas que parecería resultar de menor agrado para los docentes es la de registrar en forma escrita el plan de intencionalidades – metodologías, recursos y estrategias- que serán implementadas a lo largo del año para cumplir con los objetivos propuestos para cada curso.

La elaboración de un plan anual que dé cuenta del proceso reflexivo seguido por cada docente para indicar qué se pretende hacer en el aula y el cómo se llevará adelante dicha acción parecerían no ser tenidas en cuenta a la hora de realizar este tipo de documentos. En su lugar se observa un cronograma de tiempos que se planean cumplir para atender el tratamiento de los contenidos especificados en los programas propuestos por el CES.

Del cruzamiento de datos se pudo establecer que a pesar de no ser plasmados en los espacios correspondientes a tales fines, este proceso de reflexión, autonomía pedagógica y libertad en

cuanto a la toma de decisiones de lo que ocurre en el aula es realizado en forma habitual por este grupo de docentes.

Es posible observar que existe una preocupación constante por el qué contenidos priorizar, cómo trabajarlos y con qué recursos para favorecer sus prácticas de enseñanza. Los docentes indicaron trabajar en forma coordinada: discutir y fundamentar aquellos contenidos que consideran necesario priorizar, transmitir sus experiencias de aula, analizar estrategias metodológicas, entre otras.

Sin embargo, este tipo de acciones parecerían constituirse en una práctica invisible ya que no aparecen contempladas en los espacios correspondientes a tales procesos.

Del estudio realizado es posible indicar que la planificación anual no siempre es vista por los docentes como un espacio de reflexión donde plasmar sus intencionalidades. Este proceso parecería constituirse en una práctica invisible del colectivo de estos profesores quienes de todas formas cumplirían con esta tarea desde su quehacer práctico, sin aparecer materializada por escrito.

5.4. Consideraciones finales

Plantear la temática abordada e ir delimitando el problema que dio origen a este trabajo de investigación resultó todo un desafío. En esta tesis se intentó determinar las metodologías de trabajo principalmente implementadas por los docentes de Bachillerato al momento de enseñar Geometría, en particular se procuró detectar cuáles son las cuestiones atendidas por estos profesores para el tratamiento de las demostraciones.

Fue posible caracterizar las prácticas de enseñanza de la Geometría en Bachillerato en prácticas de transformación, prácticas de representación material y práctica invisible.

En primer lugar destacaría la fuerte tendencia de cambio en cuanto a las metodologías de abordaje de las demostraciones y argumentaciones. Se llegó a concluir que estos profesores consideran relevante la participación activa de los estudiantes en el aula por lo que se tiende

cada vez más a la selección de actividades que impliquen un verdadero proceso de producción Matemática.

Sería posible establecer que el empleo de recursos didácticos se encuentra presente en las clases de Bachillerato. El empleo de recursos didácticos serviría de soporte para el desarrollo de habilidades como la visualización, la abstracción, la elaboración de conjeturas, la argumentación.

Se observó además la planificación anual como una práctica cuyos verdaderos objetivos se dejan entrever entre los discursos de este grupo de docentes, pero que en raras ocasiones este proceso de reflexión aparece por escrito

Paradójicamente, finalizando esta tesis se genera la sensación de que aún existen desafíos por responder. Por tal motivo, se considera pertinente hacer explícitas algunas cuestiones que se fueron presentando a medida que se avanzó en este estudio y que a futuro resultaría interesante poder esclarecer.

Se entiende que muchas de las metodologías de trabajo que los docentes sujetos a esta investigación muestran realizar presentarían puntos en común con las estrategias de enseñanza generalmente empleadas en el Ciclo Básico. En este orden de cosas, ¿podría hacerse una distinción entre las metodologías de abordaje de la Geometría en Bachillerato y en Ciclo Básico? Las estrategias de enseñanza empleadas en ambos ciclos educativos, ¿son las mismas?, ¿y los recursos didácticos? De ser así, ¿cómo se implementa su uso?

Atender estas interrogantes supondría ahondar en las construcciones teóricas que dieron sustento a este trabajo.

6. Bibliografía

- ALSINA, C., BURGUÉS, C. & FORTUNY, Josep. (1997) *Invitación a la Didáctica de la Geometría*. Madrid: Síntesis.
- Administración Nacional de Educación Pública (ANEP), Consejo de Educación Secundaria (CES). (2010) *Planes y programas: Ajustes 2010 Programas de Matemática de Bachillerato. Reformulación 2006*. Accedido el 10/07/2012], desde <http://www.ces.edu.uy/ces/images/stories/reformulacion06/ajustesprogrmat2010/ajustes2010progrmatdivcientifica5ref2006.pdf>
- Administración Nacional de Educación Pública (ANEP), Programa de Educación Inicial y Primaria. (2008) Accedido el 20/05/2012, desde http://www.cep.edu.uy/archivos/programaescolar/Programa_Escolar.pdf
- Administración Nacional de Educación Pública (ANEP). (2005) Implicancias para la política educativa de los resultados logrados por los estudiantes uruguayos en las pruebas internacionales PISA 2003. *Boletín informativo 7*. Accedido el 08/01/2012, desde <http://www.anep.edu.uy/documentos/PISABoletin7.pdf>
- Administración Nacional de Educación Pública (ANEP). (2011) *La evaluación de la Competencia Matemática PISA 2012*. Accedido el 02/04/2013, desde <http://www.anep.edu.uy/anep/phocadownload/pisa/pisa2012/Informestematicos/Matematica%20en%20PISA%202012.pdf>
- Administración Nacional de Educación Pública (ANEP). Dirección Sectorial de Planificación Educativa Dirección de Investigación, Evaluación y Estadística. (2007) *La enseñanza y los aprendizajes de matemática en el primer ciclo de educación media*. Montevideo: Tradinco S.A.
- ARRIETA, J. & BRAVO, L., (2005) *Algunas reflexiones sobre las funciones de las demostraciones matemáticas*. Accedido el 17/02/2012, desde <http://www.rioei.org/deloslectores/838Bravo.PDF>
- AZCÁRATE, C. (2003) *Definiciones, demostraciones, ¿por qué?, ¿cuándo?, ¿cómo?* En: Ponencia en las X JAEM. Accedido el 10/02/2012, desde http://www.quadernsdigitals.net/datos/hemeroteca/r_40/nr_456/a_6218/6218.pdf
- BAIN, K. (2007) *Lo que hacen los mejores profesores universitarios*. Barcelona: Publicacions de la Universitat de València (PUV)

- BALACHEFF, N. (2000) *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. Bogotá. Accedido el 18/01/2012, desde <http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/52/01/33/PDF/Balacheff2000Proceso.pdf>
- BERNABEU, M., LEÓN, T., JIMÉNEZ, M. & MATOS, C. (2009) *Tratamiento de los errores frecuentes en el aprendizaje de la Matemática, el Español y las Ciencias Naturales*. Accedido el 19/03/2013, desde http://issuu.com/iemlibertad/docs/curso_52
- BETH, E., CHOQUET, G., DIEUDONNE, J., GATTEGNO, C., LICHNEROWICZ, A. & PIAGET, J. (1963) *La enseñanza de las matemáticas*. Madrid: Aguilar.
- BRESSAN, A., PÉREZ, S. & ZOLKOWER, B. (2007) *Las imágenes y las preguntas en la escuela*. Accedido el 19/03/2013, desde http://gpdmatematica.org.ar/publicaciones/imagenes_oreguntas_escuela.pdf
- BROUSSEAU, G. (2007) *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.
- CALDERÓN HERNÁNDEZ, G. (2005) *Aprender a investigar investigando*. Universidad Nacional de Colombia. Accedido el 14/08/13, desde http://books.google.com.uy/books?hl=en&lr=&id=xJ_0cYjb_vgC&oi=fnd&pg=PT14&dq=aprender+a+investigar+investigando&ots=bbv6Ei0QnQ&sig=oLqpf9JShk0GfQnLlpo8yPqWnwQ#v=onepage&q=aprender%20a%20investigar%20investigando&f=false
- CALVO PESCE, C. (2001) *Un estudio sobre el papel de las definiciones y las demostraciones en cursos preuniversitarios de Cálculo Diferencial Integral*. (Tesis Inédita de doctorado). Universidad autónoma de Barcelona. Accedido el 20/12/2012, desde <http://www.tdx.cat/bitstream/handle/10803/4689/ccp1de1.pdf?sequence=1>
- CAMILLONI, A., DAVINI, C., EDELSTEIN, G., LITWIN, E., SOUTO, M. & BARCO, S. (1996) *Corrientes didácticas contemporáneas*. Buenos Aires: Paidós.
- CEA D'ANCONA, M. A. (1998). *Metodología Cuantitativa. Estrategias y técnicas de investigación social*. Madrid: Síntesis.
- Comisión Económica para América Latina y el Caribe (CEPAL). (1994) *Los Bachilleres Uruguayos: Quiénes son, qué aprendieron y qué opinan*. Montevideo. Accedido el 09/01/2012, desde <http://www.eclac.cl/publicaciones/xml/0/13610/LC-R120.pdf>
- CHARLOT, B. (1986) *La epistemología implícita en las prácticas de enseñanza de las matemáticas*. Accedido el 07/06/2013, desde http://www.buenosaires.gob.ar/areas/educacion/cepa/epistemologia_charlot.pdf
- CHEVALLARD, Y. (2000) *La transposición didáctica. Del Saber Sabio Al Saber Enseñado*. 3ra.ed. Buenos Aires: Aique.

- CHEVALLARD, Y., BOSCH, M., & GASCÓN, J. (1997) *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. 1ra.ed. Barcelona: Horsori.
- CLARK, C. & PETERSON, P. (1989) Procesos de pensamiento de los docentes. En WITTRICK, M. (1997) *La investigación de la enseñanza, III. Profesores y alumnos*. Barcelona: Paidós.
- COLL, C., MARTÍN, E., MAURI, T., MIRAS, M., ONRIBIA, J., SOLÉ, I., & ZABALA, A. (1999) *El constructivismo en el aula*. Barcelona: Graó.
- COMENIO, J. (1998) *Didáctica Magna*. 8^{va} Ed México: Porrúa.
- CRESPO CRESPO, C. (2005) *La importancia de la argumentación matemática en el aula*. Universidad de Buenos Aires. Accedido el 04/04/2012, desde <http://www.soarem.org.ar/Documentos/24%20Crespo.pdf>
- CRESPO CRESPO, C. & MICELLI, M. 2012. *Las figuras de análisis en la antigüedad*. Accedido el 11/06/2012, desde <http://www.soarem.org.ar/Documentos/52%20Micelli.pdf>
- DA SILVA, T. (1998) Cultura y currículum como prácticas de significación. *Revista de Estudios del Currículum*. 1, 1.
- DE DONOSTI, B. & FOUZ, F. (2005) *Modelo de Van Hiele para la didáctica de la Geometría*. Accedido el 17/02/2012, desde http://www.cimm.ucr.ac.cr/ciaem/articulos/universitario/materiales/Modelo%20de%20Van%20Hiele%20para%20la%20did%20%C3%A1ctica%20de%20la%20Geometr%C3%ADa.*Fouz,%20Fernando%20B%20De%20Donosti,%20Berritzegune.*Fernando%20Fouz,%20Berritzegune%20de%20Donosti.pdf
- DE LA TORRE, E. (2003) *Didáctica de la geometría y demostración de propiedades*. Accedido el 18/02/2012, desde <http://www.uv.es/apregeom/archivos2/DeLaTorre03.pdf>
- DÍAZ GODINO, J., GÓMEZ B., GUTIÉRREZ, Á. & RICO, L. (1999) *Área de conocimiento: Didáctica de la Matemática*. Madrid: Síntesis.
- DUOADY, R. (1984) Relación enseñanza – aprendizaje. Dialéctica instrumento – objeto, juegos de encuadres. *Cuadernos de didáctica de las matemáticas*, 3. Buenos Aires.
- DUVAL, R. (2006) *Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación*. Accedido el 27/02/2012, desde http://dmlc.cindoc.csic.es/pdf/GACETARSME_2006_9_1_05.pdf
- EISNER, E. (1998) *Cognición y currículum. Una nueva visión*. Buenos Aires: Amorrortu.
- ESTEVE, J. M. (2006) Identidad y desafíos de la condición docente. En: TENTI FANFANI, E. *El oficio del docente. Vocación, Trabajo y profesión en el siglo XXI*. Buenos Aires: Siglo XXI/IPE- UNESCO/ Fundación OSDE.

- FERNÁNDEZ, A. (2008) *La inteligencia atrapada*. Buenos Aires: Nueva Visión.
- FRIPP, A. (2011) *La construcción metodológica de las prácticas de enseñanza de la Geometría*. (Tesis Inédita de Maestría). Universidad ORT. Uruguay. Montevideo.
- GÍL, D. & DE GUZMÁN, M. (1993) *Enseñanza de las ciencias y la matemática. Tendencias e innovaciones*. Madrid: Popular S.A.
- GODINO, J. & RECIO, Á. (2001) *Significados institucionales de la demostración. Implicaciones para la educación Matemática*. Accedido el 03/02/12, desde <http://ddd.uab.es/pub/edlc/02124521v19n3p405.pdf>
- HERNÁNDEZ SAMPIERI, R., FERNÁNDEZ COLLADO, C., BAPTISTA LUCIO, P. 1997. *Metodología de la Investigación Social*. México: Mac Graw Hill.
- HERNÁNDEZ SAMPIERI, R., FERNÁNDEZ COLLADO, C., BAPTISTA LUCIO, P. 2010. *Metodología de la Investigación Social*. 5ta Ed. México: Mac Graw Hill.
- IBÁÑEZ, M. (2001) *Cuatro cuestiones en torno al aprendizaje de la demostración*. Accedido el 17/02/2012, desde <http://funes.uniandes.edu.co/1411/>
- ITZCOVICH, H. (2005) *Iniciación al estudio didáctico de la Geometría*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.
- JACKSON, P. W. (2001) *La vida en las aulas*. Madrid: Morata
- KINCHELOE, J. L. (2001) *Hacia una revisión crítica del pensamiento docente*. Barcelona: Octaedro.
- LITWIN, E. (2008) *El oficio de enseñar. Condiciones y contextos*. Buenos Aires: Paidós.
- LONGWORTH, N. (2003) *El aprendizaje a lo largo de la vida*. Barcelona: Paidós.
- MACHADO, A. (2000) *Antonio Machado para niños*. 9^{na} Ed. Madrid: Ediciones de la Torre.
- MARTÍNEZ RECIO, A. (2001) *La demostración en matemática. Una aproximación epistemológica y didáctica*. Universidad de Córdoba. Accedido el 04/04/2012, desde <http://scholar.google.com/scholar?q=demostracci%C3%B3n+en+matematica&hl=es&lr>
- MARTÍNEZ RECIO, A. & RIVAYA, J. (1998) *Una metodología activa y lúdica para la enseñanza de la Geometría*. Madrid: Síntesis.
- MEIRIEU, P. (1992) *Aprender, sí. Pero ¿cómo?* Barcelona: Octaedro.
- MONEREO, C., CASTELLÓ, M., CLARIANA, M., PALMA, M. & PÉREZ, L. (2001) *Estrategias de enseñanza y aprendizaje. Formación del profesorado y aplicación en la escuela*. 9^{na}. Ed. Barcelona: Graó.
- MORENO HERRERO, I. (2004). *La utilización de medios y recursos didácticos en el aula*. Departamento de Didáctica y Organización Escolar. Facultad de Educación. Universidad

- Complutense de Madrid. Accedido el 09/02/2013, desde <http://pendientedemigracion.ucm.es/info/doe/profe/isidro/merecur.pdf>
- PIAGET, J. (1998). *La equilibración de las estructuras cognitivas. Problema central del desarrollo*. 5^{ta} Ed. Madrid: Siglo veintiuno.
 - REAL ACADEMIA ESPAÑOLA. (1992) *Diccionario de la Lengua Española*. 21^{ra} Ed. Madrid: Espasa Calpe.
 - RODRÍGUEZ RUIZ, O. (2005) La Triangulación como Estrategia de Investigación en Ciencias Sociales. *Revista de Investigación en Gestión de la Innovación y Tecnología. LA I+D QUE TENEMOS*. 31. Accedido el 01/11/12, desde <http://www.madrimasd.org/revista/revista31/tribuna/tribuna2.asp>
 - ROSENMUND, M. (2008) El discurso actual acerca del cambio curricular: un análisis comparativo de los informes nacionales sobre educación. En BENAVIDES, A. & BRASLAVSKY, C. (2008) *El conocimiento escolar en una perspectiva histórica y comparativa. Cambios de currículos en la educación primaria y secundaria*. Buenos Aires: Granica.
 - SADOVSKY, P. (2005) *Enseñar Matemática hoy. Miradas, sentidos y desafíos*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.
 - TERIGI, F. (2012) *Los saberes docentes. Formación, elaboración en la experiencia e investigación*. Documento básico del VIII Foro Latinoamericano de Educación: ¿Qué debe saber un docente y por qué? Buenos Aires: Santillana. Accedido el 25/07/2012, desde http://www.fundaciónsantillana.com/upload/ficheros/noticias/201205/documento_basico_2012.pdf
 - TROP, L. & SAGE, S. (1998) *El aprendizaje basado en problemas*. Buenos Aires: Amorrortu.
 - VALLES, M. (2007) *Técnicas cualitativas de investigación social. Reflexión metodológica y práctica profesional*. Madrid: Síntesis.
 - VILLARROYA BULLIDO, F. (1994) El empleo de materiales en la enseñanza de la Geometría. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado*. 21. Accedido el 01/02/12], desde http://scholar.google.com.uy/scholar?q=El+empleo+de+materiales+en+la+ense%C3%B1anza+de+la+geometr%C3%ADa&hl=en&as_sdt=0%2C5&as_ylo=1994&as_yhi=1994

7. Anexos

Anexo 1: Glosario

- **Abstraer:** construir mentalmente un objeto y sus propiedades, reconociéndolo aisladamente.
- **Argumentar:** realizar un razonamiento discursivo que permita convencer a otro de la afirmación que se desee sostener (Azcárate, 2003).
- **Ciclos educativos:** La Educación Secundaria en el Uruguay se encuentra dividida en dos tramos denominados ciclos educativos. El Primero, Educación Básica o ciclo Básico a la que asisten alumnos de entre 12 y 15 años de edad y el segundo ciclo, denominado Bachillerato, al que concurren estudiantes de entre 16 y 18 años.
- **Demostrar:** En el contexto matemático se denomina así a la acción empleada al establecer una secuencia lógica de enunciados (definiciones, axiomas, teoremas)–que dan prueba, consecuentemente, de un nuevo enunciado (Azcárate, 2003).
- **Estrategias didácticas:** medios empleados por el docente con la finalidad de favorecer los procesos de aprendizajes.
- **Explicar:** dar un discurso argumentativo mediante el cual explicitar un que una afirmación verdadera (Azcárate, 2003).
- **Hacer Matemática:** Según Charlot (1986), hacer Matemática es “*construirlas, fabricarlas, producirlas... se trata de que los alumnos... [se comprometan]... en un proceso de producción matemática donde la actividad que ellos desarrollen tenga el mismo sentido que el de los matemáticos que forjaron los conceptos matemáticos nuevos*” (Charlot, 1986; 1).
- **Intuición:** conocimiento inmediato que resulta directo de la percepción sin seguir una construcción racional. “*Tener intuición es formarse una idea de algo, ver algo antes no visto, captar algo por los sentidos*” (Eisner, 1998; 59).
- **Modelización Matemática:** Transformación de una situación problema presente en un contexto real en un problema matemático. Mediante el empleo de una serie de herramientas y procedimientos se llega a encontrar un resultado que se ajusta al problema formulado matemáticamente. Estos han de ser interpretados en contexto

inicial con el fin de determinar la validez o no de la solución obtenida matemáticamente dentro del contexto que le dio origen al problema (PISA, 2012).

- **Pensar geoméricamente:** razonar sobre un objeto geométrico, poniendo en juego procesos de pensamiento tales como el representar, visualizar, clasificar, abstraer, conjeturar, analizar, generalizar, entre otros (Azcárate; 2003).
- **Prácticos:** En los cursos de Bachillerato las clases de Matemática presentan los programas organizados “en torno a un teórico... y aplicando esa teoría a situaciones problemáticas y actividades diversas” (Programa de Matemática, 3er año Bachillerato, opción Físico Matemático, 2006; 2), presentadas a través de la compilación de actividades (problemas y ejercicios) a lo que se le denomina prácticos (Programa de Matemática, 3er año Bachillerato, opción Físico Matemático, 2006; 2).
- **Probar:** emplear mecanismos para establecer que una explicación dada con anterioridad es verdadera. Las pruebas se caracterizan por estar aceptadas por la comunidad en la que están siendo aplicadas. (Azcárate, 2003).
- **Profesor adjunto:** Docente que trabaja en forma conjunta con el titular del grupo de 2do y 3er año de Bachillerato. Ambos docentes han de trabajar y coordinar todas las propuestas de clase: planificación diaria, pruebas de evaluación, trabajos escritos y su corrección y evaluación de los estudiantes.
- **Puesta en común:** Espacio común de discusión sobre lo trabajado, instancia en la cual los estudiantes, con la participación mediadora del docente, comparten los razonamientos y opiniones efectuados. De este modo el docente busca la construcción o consolidación de los conceptos que se desean abordar a través de la participación activa de los estudiantes.
- **Recursos didácticos:** “... *medios materiales de que se dispone para conducir el aprendizaje de los alumnos*” (Mattos en Moreno Herrero, 2004; 2).
- **Validar:** dar firmeza de que una aseveración es verdadera (Balacheff, 2000).
- **Visualizar:** saber ver. Observar y retener imágenes que permitan reconocer las mismas características y propiedades de entre una variedad de objetos.

Anexo 2: Síntesis de programas de Bachillerato que incluyen unidades de Geometría

El cuadro adjunto brinda un resumen de los principales fundamentos y contenidos abordados en cada uno de los programas de Bachillerato que incluyen unidades de Geometría en sus cursos.

	1er año de Bachillerato	2do año de Bachillerato	3er año de Bachillerato		
		Núcleo Común	Matemática II Opción: Físico Matemático	Matemática Opción: Matemática y Diseño	Matemática IV Opción: Matemática y Diseño
Principales fundamentos	<p>“El programa se desarrollará considerando por un lado la necesidad de afianzar conocimientos adquiridos por el alumno en cursos anteriores y teniendo en cuenta que el primer año de BD es ... un curso de articulación entre el C.B.U. y los cursos posteriores del bachillerato”.</p>	<p>“En el ámbito de la geometría sintética se estudian problemas de una complejidad levemente superior: las homotecias y las semejanzas en el plano, y los planos, rectas, algunos poliedros y la esfera en el espacio. En todo el bloque es altamente recomendable la utilización de recursos informáticos, tanto para representar en la pantalla del computador las soluciones de los problemas y los objetos estudiados, como, de ser posible, la programación de los algoritmos que se enseñan manualmente. Es importante agregar que hoy, en el mundo en que la información se transmite cada vez más en forma de imagen, el estudio de los objetos geométricos acrecienta su</p>	<p>“En esta etapa se pretende enfrentar al alumno con un método de trabajo más riguroso que el realizado en cursos anteriores, fomentando una participación activa en la resolución de problemas donde se estimulará la experimentación, elaboración de conjeturas y elaboración de las mismas... La demostración debe considerarse en un sentido amplio, el énfasis debe estar en la argumentación más que en el rigor y en los detalles... Razonar, argumentar y justificar las afirmaciones debe formar parte del trabajo en el aula”.</p>	<p>“...se pretende enfrentar al alumno con un método de trabajo más riguroso que el realizado en cursos anteriores... se estimulara la experimentación, elaboración de conjeturas y demostración de las mismas... No se descartan las definiciones formales y el uso de cuantificadores cuando el nivel cognitivo de los estudiantes lo permita, pero ”</p>	<p>“El espacio geométrico euclidiano es uno de los modelos matemáticos que mejor interpreta las características del espacio físico. Asociado a una forma representativa que describe sus objetos y propiedades en el plano, genera un modelo de Matemática aplicada, que conocemos con el nombre de Geometría Descriptiva... su conexión con la Matemática es directa: crea una técnica para representar objetos y relaciones, propios de la Geometría del Espacio”.</p>

		importancia”.			
Síntesis de contenidos geométricos	<p>Lugares geométricos y aplicaciones a construcciones: Circunferencia. Círculo. Mediatriz. Bisectriz. Elementos notables en un triángulo. Ángulos inscriptos, semi-inscriptos y centrales. Arco capaz. Intersección de lugares geométricos y aplicaciones a la construcción de triángulos y polígonos.</p>	<p>Geometría sintética en el plano: Homotecias en el plano. Definiciones y ejemplos. Propiedades de la homotecia. Figuras semejantes. Definición y propiedades. Geometría sintética en el espacio Rectas y planos en el espacio. Paralelismo, perpendicularidad y ortogonalidad. El cubo, la pirámide, la esfera y sus secciones planas.</p>	<p>Resolución de problemas geométricos: El estudio de la demostración. Cuadriláteros. Clasificación y propiedades. Semejanza de triángulos. Geometría del Espacio.</p>	<p>Construcciones geométricas: Fractales. Construcción de curvas. Construcciones de segmentos cuya medida es un número irracional. Geometría analítica: Ecuación de la tangente a una circunferencia Intersecciones de una superficie cónica con un plano. Parábola. Elipse. Hipérbola. Propiedades. Tangente a una cónica. Ecuación de la tangente</p>	<p>Geometría del espacio: Rectas no coplanares. Perpendicularidad entre recta y plano. Rectas ortogonales. Planos perpendiculares. Paralelismo entre recta y plano y entre planos. Propiedades que relacionan perpendicularidad y paralelismo. Poliedros regulares. Estudio de propiedades métricas del tetraedro, hexaedro y octaedro.</p>

Fuente: Elaboración personal en base a material extraído de los programas propuestos por el CES.

Anexo 3: Encuesta a docentes

Encuesta aplicada a la totalidad de docentes de Matemática que dictan clase en grupos de Bachillerato y cuyos cursos contienen unidades que integran contenidos geométricos.

1) **Sexo:** M F

2) **Antigüedad:**

3) **Docente egresado:**

Si Año de Egreso: Especialidad:.....

No Observaciones (en curso, otros títulos):.....
.....

4) **Carácter del cargo:** Efectivo Interino Suplente

5) **Desempeña su labor como docente de secundaria en:**

Primer y segundo ciclo Cursos a cargo:.....

Sólo segundo ciclo Cursos a cargo:.....

6) **¿Qué cuestiones tiene en cuenta al momento de trabajar un contenido geométrico?**

.....
.....
.....

7) **¿En qué momento atiende las cuestiones planteadas en el ítem 6?**

.....
.....
.....

8) **¿Existen normas estipuladas en la institución educativa donde desempeña su labor que influyan en sus decisiones al momento de planificar? (Si las hay, especifique cuáles).**

.....
.....

9) **Complete esta tabla teniendo en cuenta el uso que hace de cada recurso didáctico:**

	No, nunca	Sí, siempre que lo considere pertinente
Materiales tradicionales (juego de Geometría, calculadora, etc.)		
Materiales concretos (cajas, pelotas, lanas, sorbitos, clips, etc.)		
Software de Geometría Dinámica (GeoGebra, Cabri, etc)		
Otros:.....		

Si su respuesta fue “Sí, siempre que lo considere pertinente”;

A) Señale dos de las opciones que más le convengan:

- Su empleo facilita la construcción de los conceptos.
- Los alumnos se sienten más motivados.
- Favorece la visualización (saber ver, observar y retener imágenes detectando diferencia y similitudes entre una variedad de objetos).
- Favorece la abstracción (construcción mental de un objeto y sus propiedades, reconociéndolo aisladamente).
- Otros:

B) Emplea recursos didácticos principalmente para:

- Introducir conceptos.
- Visualizar propiedades.
- Consolidar unidades.
- Otros:.....

Si su respuesta fue “No, nunca” señale la opción que más le convenga:

- Se pierde mucho tiempo.
- Los alumnos no se motivan.
- No considero que el emplear materiales didácticos favorezcan los aprendizajes.
- Otros:.....

10) Señale dos de las actividades más frecuentes que realizan sus alumnos en el aula en Bachillerato cuando usted enseña Geometría:

- Resuelven problemas
- Responden preguntas que usted formula
- Responden preguntas formuladas por sus pares
- Escuchan y toman notas
- Hacen preguntas
- No intervienen
- Discuten en grupos
- Se muestran desinteresados
- Otros.....

11) Indique cuál o cuáles de los siguientes recursos utiliza o ha utilizado en sus clases para enseñar Geometría:

- Tradicionales (juego de Geometría, calculadora)
- Materiales concretos (cajas, pelotas, lanas, sorbitos, clips, etc)
- Software educativos. Indique cuál o cuáles:.....
- Otros:.....

12) ¿Cómo ha implementado el uso de los recursos didácticos en sus clases de Geometría?

- Cada alumno trabaja individualmente con su material y resuelve la consigna en forma individual.
- Cada alumno trabaja con un ejemplar y resuelve la consigna en pequeños grupos
- Se trabaja en pequeños grupos compartiendo el recurso y discutiendo soluciones en cada grupo
- Se lleva un modelo y trabajan todos juntos discutiendo soluciones entre todos
- No se lleva materiales
- Otros:.....

13) ¿Considera relevante emplear recursos didácticos para la enseñanza en Bachillerato?

- Sí, porque.....
- A veces, porque.....
- No, porque.....

14) A su criterio, ¿cuál considera que es la modalidad de trabajo más adecuada para que los alumnos de Bachillerato aprendan a argumentar geoméricamente?

.....

.....

.....

.....

15) ¿Y cuál considera que es la modalidad de trabajo más adecuada para que los alumnos de Bachillerato aprendan a demostrar geoméricamente?

.....

.....

.....

Anexo 4: Selección de docentes para las entrevistas

Tirilla diseñada para la selección de los docentes que accedieran a continuar con la siguiente fase del trabajo de campo.

Como segunda etapa de esta investigación necesitaría poder mantener una entrevista con profesores de Matemática en la cual se mantendrá el anonimato de quién participe. Si usted está interesado en ser parte de la misma, le agradezco:

1. completar los datos requeridos en la tirilla
2. cortar la tirilla y colocarla en el sobre que a tales efectos se anexa
3. entregar por separados la encuesta y el sobre con la tirilla en su interior

Datos requeridos para continuar participando en la investigación:

Nombre completo:.....

Dirección de correo electrónico:.....

Teléfono de contacto:.....

Deseo participar de esta etapa de la investigación porque.....

.....

.....

.....

.....

Anexo 5: Carta a directores

Carta entregada durante las reuniones efectuadas con las direcciones de las instituciones en las cuales se llevó adelante el trabajo de campo, donde se informó del trabajo de investigación que se proponía realizar y donde se explicitaban los motivos de las encuestas y futuras entrevistas.

Ciudad, fecha.

Encabezamiento

Señor/a Director/a del Liceo A:

La que suscribe, PATRICIA VEDOVATTI ARIAS, C.I uruguaya, domiciliada en Salto y docente de Matemática, ante usted se presenta y expone:

- Es estudiante del Máster en Educación con énfasis en Investigación en enseñanzas y aprendizajes impartido por el Instituto de Educación de la Universidad ORT
- Se encuentra en la etapa de realización del trabajo de campo de su Tesis “Abordaje metodológico de la enseñanza de la Geometría en Bachillerato

Por las razones anteriormente mencionadas, solicita la autorice a mantener instancias de encuentro con los docentes de Matemática de 4° año, 5° año Núcleo Común, y Matemática I, II y IV de 6° año.

En dichos encuentros se planifica trabajar con una encuesta autoadministrada y entrevistas que permitan dar cuenta de las metodologías de enseñanza de la Geometría mayormente empleadas por los docentes de Matemática.

Saludos cordiales,
Patricia Vedovatti.

Anexo 6: Entrevista a docentes

Guión de entrevista aplicado a los docentes Matemática que dictan clase en grupos de Bachillerato y cuyos cursos contienen unidades que integran contenidos geométricos seleccionados luego de la aplicación de las encuestas.

1) Me gustaría que me contara cuál fue la clase de Geometría que hayas dado en Bachillerato que más te haya gustado.

Preguntas emergentes:

¿Qué tipo de propuesta utilizaste?

¿Cómo abriste la actividad?

¿Te acordás de la actividad? (si es posible recuperar la propuesta original, inclusive decir o escribir la letra)

¿Cuál fue la modalidad de trabajo de los estudiantes? (¿Cómo trabajaron? ¿Qué hicieron?)

¿Cuál fue tu rol en el transcurso de la actividad?

¿Cómo terminaste la actividad?

Bueno, entonces ¿por qué es que la considerás esta clase como la más efectiva?

2) ¿Recuerdas puntualmente alguna actividad de Geometría en la que los alumnos hayan tenido que explicar un razonamiento seguido para la elaboración o construcción del concepto con el que se estaba trabajando?

Preguntas emergentes:

¿Te acuerdas de la situación inicial que se preopuso? (o sea el problema).

¿Cómo llevaron a cabo los estudiantes proceso de construcción del concepto?

¿Cómo trabajaste vos?

¿Cómo (y quién) se explicó la conjetura efectuada por los estudiantes?

¿En esa actividad vos buscabas que pasaras eso o fue un emergente que surgió en esa clase?

¿Cómo habías pensado la actividad para que ello ocurriera?

Y esa estrategia, ¿la empleás siempre?

Bueno, entonces ¿considerás que se llevó a cabo un proceso de argumentación en el aula?
¿Por qué?

3) Me gustaría que pensaras en una clase de Geometría en la que hayas enseñado alguna demostración, ¿podrías relatarla?

Preguntas emergentes:

¿Te acordás de la propuesta? (¿Podrías transcribirla? Si es posible recuperar la propuesta original)

¿Por qué elegiste trabajar esa demostración?

¿Cómo propusiste esa actividad?

¿Cómo trabajaron los alumnos? (Durante el desarrollo de la actividad, los alumnos: ¿hacen preguntas?, ¿Qué tipo de preguntas?)

¿Cuál fue tu rol en el transcurso de la actividad?

¿Cómo llevó a cabo el cierre de esa actividad?

Bueno, entonces ¿cómo pensás que es la mejor manera de trabajar las demostraciones geométricas con los estudiantes?

4) ¿Cuál es tu opinión sobre el apoyo de recursos didácticos en el aula? ¿Por qué?

Preguntas emergentes:

¿Cuáles son los recursos didácticos que más utilizás en el aula? ¿Por qué?

¿Con qué finalidad utilizás XX recurso?

Preguntas auxiliares opcionales

¿Qué papel le asignás a la manipulación en el trabajo geométrico en tus clases? Me darías un ejemplo.

¿Qué papel le asignás a la visualización en el trabajo geométrico en tus clases? Me darías un ejemplo.

¿Qué papel le asignás a la abstracción en el trabajo geométrico en tus clases? Me darías un ejemplo

5) Con todo lo que hemos conversado, me gustaría entonces que me digas ¿qué cuestiones te parecen importantes tener en cuenta al momento de pensar una clase de Geometría en el Bachillerato con el fin de generar una buena clase como las que me contaste antes?

Anexo 7: Entrevista a actor calificado

1) ¿Podrías contarme alguna clase de Geometría en Bachillerato que hayas visitado y que más te haya gustado?

(¿De qué manera fueron abordados los contenidos geométricos durante el transcurso de la clase? ¿Y durante el proceso de cierre? ¿Los alumnos trabajaron cuanto tiempo necesitaron?, ¿se marcaron pautas de trabajo?, ¿las conclusiones efectuadas en el aula fueron dadas por los docentes o por los estudiantes?

Qué opinión te merece la expresión:

“Todas las actividades de Geometría siempre las acompaño,... con la explicación al lado, aunque ellos no logren del todo usar el lenguaje o la anotación... científica... aunque sea con sus propias palabras trato de que ellos los expliquen”.

2) Pensando en las visitas a las clases de Bachillerato que has hecho, me gustaría que me contaras cuál es la modalidad de trabajo mayormente empleada en Geometría en Bachillerato (estrategias de clase: directivas de trabajo, uso de recursos).

¿Has visto clases de Geometría en Bachillerato donde el docente haya trabajado con recursos didácticos? ¿Como cuáles? ¿Cómo es implementado su uso?

Qué opinión te merece la expresión: *“... me gusta trabajar,... con un problema disparador que ellos tengan que trabajar el problema y a partir de ese problema les vayan surgiendo cosas a lo largo del desarrollo del problema vayan obteniendo determinadas conclusiones que les permitan llegar a lo que yo quiero... abordar directamente. Y bueno después, la disponibilidad de materiales o de soportes que tengo...”*

3) ¿Has visitado clases de Bachillerato donde se haya trabajado alguna demostración?

¿Cómo es trabajada la demostración? (¿es el docente quien trabaja? ¿los alumnos participan de este proceso?, ¿de qué manera? ¿Se emplea algún tipo de recursos didácticos?).

Qué opinión te merece la expresión: *“Las demostraciones son asignaturas pendientes de los programas hoy en día, no te piden mucha demostración... Y las pocas demostraciones que uno hace, termina haciéndolas uno en el pizarrón... Reconozco que a mí me falta enseñarles a que puedan ellos demostrarlo y dejarlos, ¿pero cuánto tenés que dejarlos?... reconozco que*

es materia pendiente de nosotros y de los programas que no exigen demostrar casi nada... históricamente aprendí Matemática y era teorema- demostración, era una cosa de memoria. Y vos tenías ¿te acordás de la demostración del teorema del resto?” o yo que sé, no la hacías vos la hacía el profesor... ”

4) ¿Qué lugar consideras que le dan los docentes a la planificación anual? ¿Qué es lo que sueles observar con mayor frecuencia? ¿Por qué te parece que ocurre ello?

5) ¿Existe algún tipo de normas establecidas desde la inspección de Matemática que indique a los docentes cómo han de ser abordados los contenidos geométricos en el aula?