Propuesta de fórmulas para sistemas de segundo orden

Fonseca de Oliveira, André

Documento de Trabajo No. 2
Facultad de Ingeniería
Universidad ORT Uruguay
Agosto, 2006
ISSN 1688-3217

Documento de Trabajo

UNIVERSIDAD ORT
Uruguay

ISSN 1688-3217

Propuesta de fórmulas para sistemas de segundo orden

André Fonseca de Oliveira (Facultad de Ingeniería Universidad ORT Uruguay)

Documento de trabajo No. 2
Facultad de Ingeniería
Universidad ORT Uruguay
Agosto, 2006

PROPUESTA DE FÓRMULAS PARA SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN

André Luiz Fonseca de Oliveira *

* *Departamento de Electrónica y Telecomunicaciones,*
Facultad de Ingeniera Bernard Wand-Polak,
Universidad ORT Uruguay.
Cuareim 1451, 11100 Montevideo, Uruguay.

Resumen: Este trabajo presenta dos nuevas propuestas de fórmulas para el tiempo de subida de sistemas de segundo orden. La primera fórmula es para el caso de sistemas subamortiguados y su resultado es comparado con los existentes en la literatura clásica de sistemas de control. La segunda es para sistemas sobreamortiguados y no se ha encontrado propuestas similares en la literatura. Se presentan ejemplos de uso.

Keywords: second order systems, rise time.

1. INTRODUCCIÓN

En este trabajo son propuestas dos nuevas fórmulas para el cálculo del tiempo de subida en la respuesta a una entrada del tipo escalón para sistemas de segundo orden subamortiguados y sobreamortiguados. Se considera la definición como el tiempo necesario para que la respuesta varíe del 10 % al 90 % del valor final.

En el caso subamortiguado las aproximaciones polinomiales usualmente utilizadas (Levine, 1996) tienen la desventaja de presentar una buena aproximación en un rango pequeño del factor de amortiguamiento (ζ) en el intervalo $[0, 1]$. Debido a su cálculo mediante regresión también presentan coeficientes complejos o poco intuitivos.

Si se considera el caso sobreamortiguado, no se ha encontrado en la literatura una propuesta de fórmula para la aproximación al tiempo de subida. Mientras que para sistemas muy amortiguados es posible una aproximación con buena exactitud utilizando un sistema de primer orden, para los sistemas con polos similares esta técnica no es adecuada.

En la sección 2 a continuación se presenta el desarrollo de la fórmula para el caso subamortiguado. La propuesta para sistemas sobreamortiguados se describe en la sección 3. La sección 4 presenta ejemplos de aplicación para ambos tipos de sistemas. Finalmente, en la sección 5 se encuetran las conclusiones del trabajo.

2. SISTEMAS SUBAMORTIGUADOS

La utilización de fórmulas para la estimación del tiempo de subida para sistemas de segundo orden subamortiguados ($0 < \zeta < 1$) ha estado limitada a dos propuestas:

- Fórmulas exactas utilizando como definición la variación del 0 % al 100 % del valor final (Ogata, 1997) (Umez-Eronini, 2001).
- Aproximaciones mediante polinomios de primer y segundo orden válidas para cierto subintervalo del $[0, 1]$ (Kuo, 1995) (Dorf and Bishop, 2001).

Aunque los resultados de estas fórmulas sean aceptables para muchos problemas de ingenería, en ambos casos existen limitaciones. En el primer caso se considera una definición alternativa para el tiempo de subida considerando la facilidad del desarrollo de una fórmula exacta. Pero esto dificulta la comparación con los resultados obtenidos para sistemas que utilizan la definición corriente (10 % al 90 %). En las aproximaciones con polinomios (de primer y segundo orden) los resultados son satisfactorios para un rango particular, siendo inadecuados cuando se considera todo el intervalo $[0, 1]$. Aunque es posible la utilización de polinomios de grados superiores, esto no ha sido propuesto en la literatura clásica de los sistemas de control. La principal desventaja de esta alternativa es el incremento en la cantidad de parámetros. A continuación se realiza la propuesta de una nueva fórmula para el tiempo de subida de sistemas subamortiguados y, basada en esta, una fórmula simplificada que posee las virtudes de una cantidad pequeña de parámetros y una buena aproximación.

2.1 Fórmulas clásicas

Las siguientes fórmulas son usualmente utilizadas para la estimación de los tiempos de subida de sistemas subamortiguados:

- Aproximación de primer orden (Dorf and Bishop, 2001).

$$t_r = \frac{2{,}16\zeta + 0{,}60}{\omega_n} \qquad (0{,}3 \le \zeta \le 0{,}8) \tag{1}$$

- Aproximación de segundo orden (Kuo, 1995) (Levine, 1996).

$$t_r = \frac{2{,}917\zeta^2 - 0{,}4167\zeta + 1}{\omega_n} \qquad (0 \le \zeta \le 1) \tag{2}$$

La última aproximación, aunque parezca válida para todo el intervalo, tiene resultados razonables solamente en $[0{,}6; 1]$ (figura 2 más adelante).

2.2 Fórmula para sistemas subamortiguados

Para el desarrollo de la nueva propuesta serán consideradas las siguientes hipótesis:

- Una estructura exponencial de aproximación del tipo

$$\omega_n t_r = K_1 \left(e^{\alpha\zeta} - 1\right) + K_2 \tag{3}$$

- Considerar las siguientes condiciones de borde para la aproximación:
  - Que tiempo de subida para un sistema con $\zeta \to 0$ sea igual al de un sistema no amortiguado ($\zeta = 0$). En este caso $\omega_n t_{r0} = 1{,}019$.
  - Que tiempo de subida para un sistema con $\zeta \to 1$ sea igual al de un sistema críticamente amortiguado ($\zeta = 1$). Se tiene entonces que $\omega_n t_{r1} = 3{,}36$.

Considerando las hipótesis anteriores se tiene que:

$$\zeta = 0 \Rightarrow K_2 = \omega_n t_{r0}. \tag{4}$$

$$\zeta = 1 \Rightarrow K_1 = \frac{t_{r1} - t_{r0}}{e^{\alpha} - 1}. \tag{5}$$

Utilizando algoritmos de regresión se tiene que el valor óptimo ocurre para $\alpha \approx 2$. Se tiene como resultado la expresión

$$t_r = \frac{0{,}366\left(e^{2\zeta} - 1\right) + 1{,}019}{\omega_n} \tag{6}$$

Si se considera las aproximaciones

- $1{,}019 \approx 1$.
- $1/0{,}366 \approx e$.

es posible obterner la siguiente fórmula simplificada

$$t_r = \frac{e^{(2\zeta - 1)} + 0{,}632}{\omega_n} \tag{7}$$

La figura 1 ilustra el valor del tiempo de subida, t_r, calculado mediante las fórmulas clásicas encontradas en la literatura de control y la nueva fórmula propuesta. El error relativo debido a la utilización de estas fórmulas puede ser apreciado en la figura 2. Se observa la sensible mejora resultante de la utilización de la fórmula propuesta.

Si se utiliza la simplificación propuesta en (7) se incrementa el error relativo en favor de la simplicidad de los coeficientes (figura 3).

El cuadro 1 resume los errores relativos máximos obtenidos con la utilización de cada fórmula.

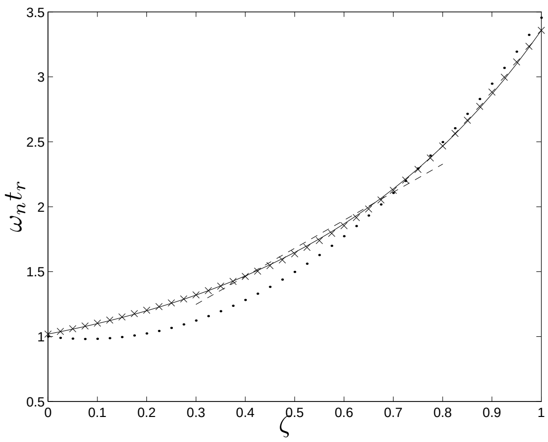

Figura 1. Tiempos de subida en función de ζ (normalizados según ω_n). Aproximaciones de primer orden (1) ($--$), de segundo orden (2) ($\cdots$), fórmula propuesta (6) ($-$) y tiempo de subida calculado (x).

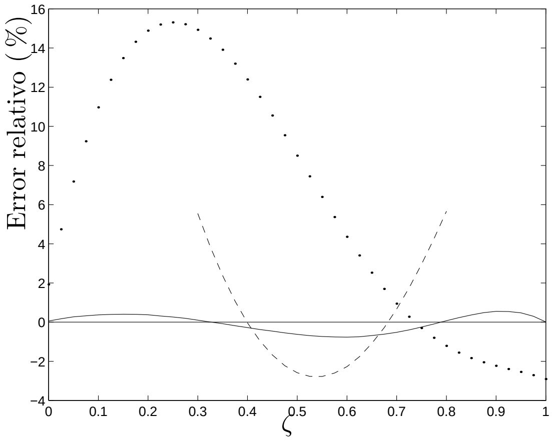

Figura 2. Errores relativos de las aproximaciones de primer orden (1) (−−), de segundo orden (2) (···) y la fórmula propuesta (6) (−).

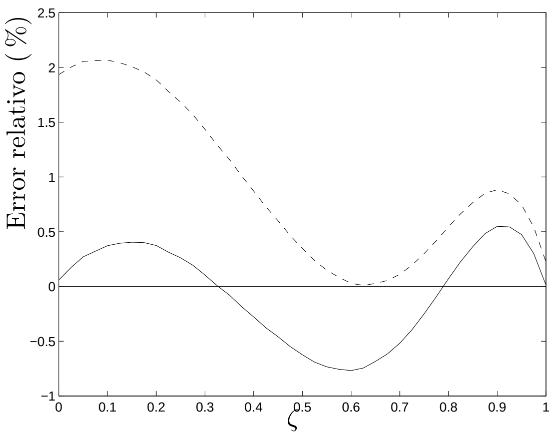

Figura 3. Errores relativos de las aproximaciones por la fórmula propuesta (6) (−) y la fórmula simplificada (7) (−−).

Cuadro 1. Comparación entre los errores relativos máximos.

Fórmula	Error relativo máximo
Primer orden (1)	5.7 %
Segundo orden (2)	15.3 %
Fórmula propuesta (6)	0.8 %
Fórmula simplificada (7)	2.1 %

3. SISTEMAS SOBREAMORTIGUADOS

En el caso de sistemas sobreamortiguados ($\zeta > 1$) no se ha encontrado una fórmula desarrollada para el cálculo del tiempo de subida. En la práctica, para los casos en los cuales hay un polo dominante ($\zeta > 1{,}74$), los resultados son aproximados utilizando la fórmula para sistemas de primer oden, o sea,

$$t_r = \tau Ln(9) \tag{8}$$

siendo τ la constante de tiempo. A continuación se realiza la propuesta de una fórmula que sea adecuada para cualquier sistema sobreamortiguado.

3.1 Fórmula para sistemas sobreamortiguados

Los polos de un sistema de segundo orden sobreamortiguado valen

$$s = -\zeta\omega_n \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}\omega_n. \tag{9}$$

Para los sistemas de segundo orden con una relación mayor a 10 entre los polos ($\zeta > 1{,}74$), es común aproximar la dinámica del sistema por un sistema de primer orden utilizando el polo dominante. En este caso, el polo dominante es

$$s = -\zeta\omega_n + \sqrt{\zeta^2 - 1}\omega_n, \tag{10}$$

y tiende a $s = 0$ cuando $\zeta \to +\infty$.

Luego, es posible aproximar la constante de tiempo de los sistemas con ζ suficientemente grande por

$$\tau = \frac{1}{\left(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_n} = \frac{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}}{\omega_n}. \tag{11}$$

Cuando $\zeta \to +\infty$ se tiene que

$$\tau \approx \frac{2\zeta}{\omega_n}. \tag{12}$$

Esto permite aproximar el tiempo de subida de los sistemas con ζ grande por la expresión

$$t_r = \frac{2\zeta Ln(9)}{\omega_n} \tag{13}$$

La figura 4 ilustra el error realtivo del cálculo de $\omega_n t_r$ en función de ζ utizando la fórmula anterior (13). Es claro que para valores grandes de ζ el error relativo tiende a cero, pero para valores chicos el error es apreciable ($\approx 31\,\%$ para el caso $\zeta = 1$).

Con la finalidad de mejorar los resultados obtenidos por la fórmula anterior para el rango de valores cercanos a $\zeta = 1$ se hace la siguiente propuesta:

- Una estructura de la forma

$$\omega_n t_r = 2Ln(9)\zeta + \frac{K}{\zeta} \tag{14}$$

- Considerar las condiciones de borde para la aproximación, o sea, que tiempo de subida para un sistema con $\zeta \Rightarrow 1$ sea igual al de un sistema críticamente amortiguado ($\zeta = 1$). En este caso se tiene que $\omega_n t_{rc} = 3{,}36$.

Considerando las hipótesis anteriores

$$\zeta = 1 \Rightarrow \omega_n t_{rc} = 2ln(9) + K$$

$$\Rightarrow K = t_{rc} - 2ln(9) = -1{,}034$$

$$t_r = \frac{2Ln(9)\zeta - 1{,}034/\zeta}{\omega_n}. \qquad (15)$$

Si se simplifica la ecuación anterior utilizando la aproximación $1{,}034 \approx 1$ se tiene

$$t_r = \frac{2Ln(9)\zeta - 1/\zeta}{\omega_n}. \qquad (16)$$

La figura 4 ilustra el error relativo del uso de las fórmulas (13) y (15) para valores de $\zeta \in [1, 10]$. El incremento en el error debido al uso de la fórmula simplificada (16) es ilustrado en la figura 5.

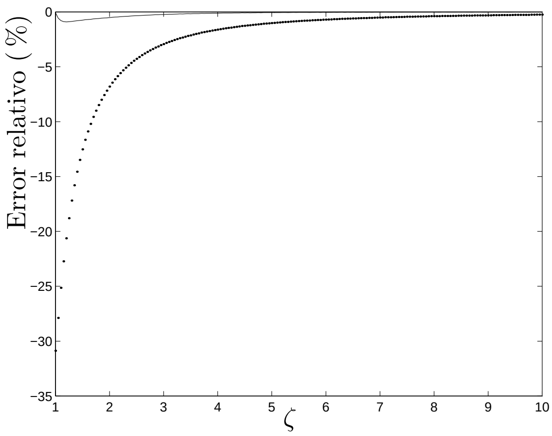

Figura 4. Errores relativos de las aproximaciones por polo dominante (13) $(\cdots)$ y la fórmula propuesta (15) $(-)$.

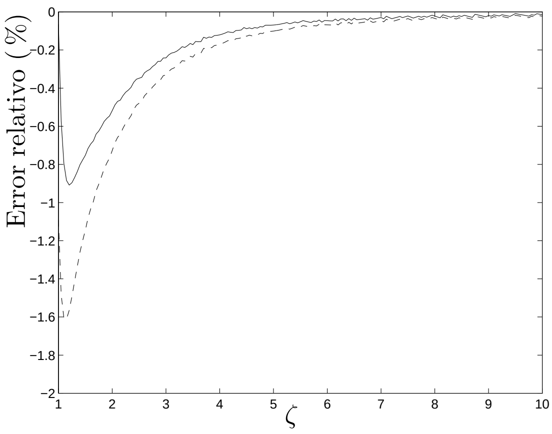

Figura 5. Errores relativos de las aproximaciones por la fórmula propuesta (15) $(-)$ y la fórmula simplificada (16) $(--)$.

Cuadro 2. Comparación entre los errores relativos máximos.

Fórmula	Error relativo máximo
Polo dominante 13)	30.9 %
Fórmula propuesta (15)	0.9 %
Fórmula simplificada (16)	1.6 %

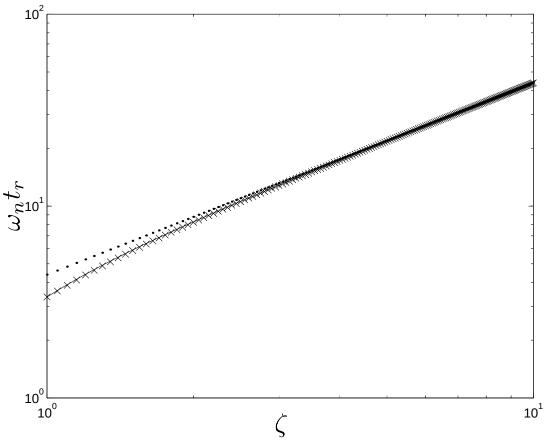

Figura 6. Tiempos de subida en función de ζ (normalizados según ω_n). Aproximaciones por polo dominante (13) $(\cdots)$, fórmula propuesta (15) $(-)$ y tiempo de subida calculado (x).

4. ALGUNOS EJEMPLOS

En los ejemplos a continuación serán utilizadas las fórmulas aproximadas.

4.1 Sistemas subamortiguados

4.1.1. Ejemplo 1. Sea el sistema

$$H(s) = \frac{5}{s^2 + 2s + 4}. \qquad (17)$$

Para este sistema se tiene que $\omega_n = 2$, $\zeta = 0{,}5$ y $t_r = 0,819$. Utilizando (7)

$$t_r = \frac{e^{(2\times 0{,}5-1)} + 0{,}632}{2} = 0{,}816$$

4.1.2. Ejemplo 2. Consideremos el sistema crítico ($\zeta = 1$)

$$H(s) = \frac{0{,}5}{s^2 + 6s + 9} \qquad (18)$$

Se tiene que $\omega_n = 3$. En este caso es posible calcular t_r utilizando ambas fórmulas para sistemas subamortiguados y sobreamortiguados. Utilizando (7) se tiene que

$$t_r = \frac{e^{(2\times 1-1)} + 0{,}632}{2} = 1{,}12.$$

Se se considera (16)

$$t_r = \frac{2\times 1\times Ln(9) - 1/1}{3} = 1{,}13.$$

Para este sistema $t_r = 1,12$.

4.1.3. Ejemplo 3. Veamos ahora el resultado para un sistema poco amortiguado, como el caso de

$$H(s) = \frac{0{,}4}{s^2 + 0{,}04s + 0{,}04} \tag{19}$$

Para este sistema $\omega_n = 0{,}2$, $\zeta = 0{,}1$ y $t_r = 5{,}52$. Si se calcula el tiempo de subida con la fórmula aproximada se tiene que

$$t_r = \frac{e^{(2\times 0{,}1-1)} + 0{,}632}{0{,}2} = 5{,}41.$$

Esto representa un errror relativo de $\approx 2\,\%$.

4.2 Sistemas sobreamortiguados

4.3 Ejemplo 4.

Sea el sistema con $\omega_n = 5$ y $\zeta = 25$

$$H(s) = \frac{10}{s^2 + 50s + 25}. \tag{20}$$

Si se utiliza (16) se tiene que

$$\frac{2 \times 5 \times Ln(9) - 1/5}{5} = 4{,}35.$$

Para este sistema el tiempo de subida vale $t_r = 4{,}35$. Para este sistema la aproximación por polo dominante da buenos resultados.

4.3.1. Ejemplo 5. Consideramos ahora un sistema para el cuál la aproximación por polo dominante no es razonable. Sea el sistema

$$H(s) = \frac{100}{s^2 + 25s + 100}. \tag{21}$$

En sistema tiene $\omega_n = 10$, $\zeta = 1{,}25$ y $t_r = 0{,}46$. Los polos son s $= -5$ y -20 (relación de 4). Utilizando la fórmula simplificada se tiene que

$$\frac{2 \times 1{,}25 \times Ln(9) - 1/1{,}25}{10} = 0{,}47.$$

En este caso realizar la estimación con (13) da como resultado $t_r = 0{,}55$ (error relativo de $\approx 19\,\%$).

5. CONCLUSIONES

En este artículo se ha propuesto dos nuevas fórmulas para el cálculo del tiempo de subida de sistemas de segundo orden. En el caso de sistemas subamortiguados la fórmula propuesta ha demostrado mejores resultados que las existentes en la literatura corriente del área de sistemas de control. Considerando su versión simplificada se tiene buena aproximación y simplicidad en los parámetros.

En el caso sobreamortiguado se ha logrado una fórmula con buenos resultados sobre todo el rango. También en este caso la simplificación posee una buena relación entre simplicidad y exactitud. No se hallado una propuesta de fórmula en la literatura para este caso.

REFERENCIAS

Dorf, Richard C. and Robert H. Bishop (2001). *Modern Control Systems*. 9a ed.. Prentice Hall.

Kuo, Benjamin C. (1995). *Automatic Control Systems*. 7a ed.. Prentice Hall.

Levine, Willians S., Ed. (1996). *The Control Handbook*. CRC Press.

Ogata, Katsuhiko (1997). *Modern Control Engineering*. 3a ed.. Prentice Hall.

Umez-Eronini, Eronini (2001). *Dinámica de Sistemas Y Control*. Thomson Learning.